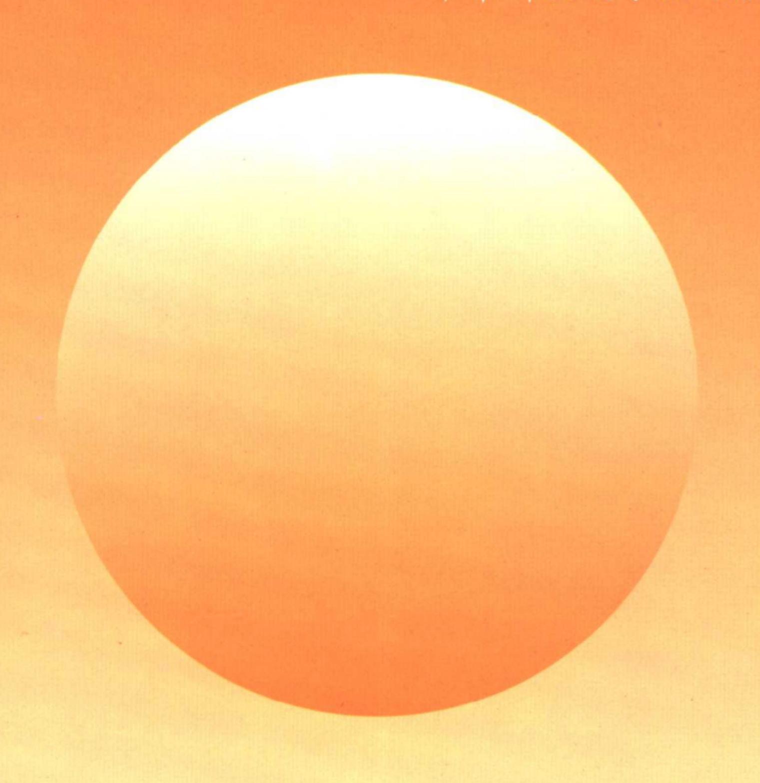
● 研 究 生 用 书 ●

MATHEMATICAL ANALYSIS TO MICROECONOMICS

华中科技大学出版社



胡适耕

微观经济的数理分析

微观经济的数理分析

胡适耕

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微观经济的数理分析/胡适耕

武汉:华中科技大学出版社,2003年8月

ISBN 7-5609-2971-0

Ⅰ.微…

Ⅱ.胡…

Ⅲ.微观经济-研究生-教材

Ⅳ.F016

微观经济的数理分析 胡适耕

责任编辑:章咏霓 封面设计:刘 卉

责任校对:封春英 责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:8 插页:2 字数:181 000

版次:2003年8月第1版 印次:2003年8月第1次印刷

ISBN 7-5609-2971-0/F·254 定价:13.50元



Mathematical Analysis to Microeconomics

Hu Shigeng

内容简介

本书运用数学的工具、方法与形式语言，系统地处理现代微观经济理论的基本内容. 全书共九章，其内容包括：偏好与选择；消费理论；生产理论；一般均衡理论；风险决策；对策论及其应用；外部性与公共物品；垄断与非对称信息；社会选择理论，等等. 本书一方面以紧凑的形式概述了微观经济学的标准内容，同时也介绍了某些近年来日趋重要与活跃的研究领域.

本书熔经济学概念与数学方法于一炉，可适应多方面读者的需要：它既可以作为经济学与应用数学专业硕士生或高年级大学生的教材，亦可供数理经济学方面的研究工作者参考.

Abstract

The purpose of this book is to provides a systematical treatment for the modern microeconomic theory by using mathematical instruments, methods and formal language. The book includes nine chapters. The main topics are as follows: preference and choice; consumption theory; production theory; the general equilibrium theory; risk decision; game theory and its applications; externalities and public goods; monopoly and asymmetric informations; social choice theory, etc. On the one hand the book contains a comprehensive treatment for standard materials of microeconomic theory, on the other hand it provides some new results which are the subject of great importance and much activity.

The book can serve as textbook for graduate students in economic or mathematial department. It can also be consulted by researchers in mathematical economics.

写在"研究生用书"出版10周年

在今天,面对科技的迅速发展,知识经济已见端倪,国际竞争也日趋激烈,显然,国家之间的竞争是国家综合实力的竞争,国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争,而经济实力的竞争关键又在于科技(特别是高科技)的竞争,科技(特别是高科技)的竞争归根结底是人才(特别是高层次人才)的竞争,而人才(特别是高层次人才)的竞争基础又在于教育。"百年大计,教育为本;国家兴亡,人才为基。"十六个字、四句话,确是极其深刻的论断。目前,国际形势清楚表明:我们国家的强大与民族的繁荣,主要立足于自己,以"自力更生"为主;把希望寄托于他人,只是一种不切实际的幻想。这里,我们决不是要再搞"闭关锁国",搞"自我封闭",因为那是没有出路的;我们强调的是要"自信,自尊,自立,自强",要以"自力更生"为主,走自己发展的道路。

显然,知识经济最关键的是人才,是高层次人才的培养,而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家方方面面的工作中,占有十分重要的战略地位。可以说,没有研究生教育,就没有威伟雄壮的科技局面,就没有国家的强大实力,就没有国家在国际上的位置,就会挨打,就会受压,就会被淘汰,还说什么知识经济与国家强大?!

"工欲善其事,必先利其器。"教学用书是教学的重要

基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《"研究生用书"总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从 1978 年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版"研究生用书"。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《"研究生用书"总序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，"要力求'研究生用书'具备科学性、系统性、先进性"。后三任研究生院院长，也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版"研究生用书"的。早在 1988 年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试·信息·信号分析》写"代序"时就提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在"这一特定方面"，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在"这一特定方面"，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套书自第一本于 1990 年问世以来，已经度

过了10个春秋，出版了8批共49种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，有15种分获国家级、部省级图书奖，有16种一再重印，久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设做出了贡献，解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”

现在，正是江南春天，“最是一年春好处”。华工园内，红梅怒放，迎春盛开，柳枝油绿，梧叶含苞，松柏青翠，樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒的时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，来自国内与来自国外的阻挠与干扰，有的还很严峻；但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题过程中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拨冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病，抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天，在百年之交与千年之交的时候，这套教学用书会

以更雄健的步伐，走向更美好的未来。

诗云："嘤其鸣矣，求其友声。"这是我们的心声。

中国科学院院士
华中理工大学学术委员会主任
杨叔子
于华工园内
1999年5月15日

前　言

本书的标题已经指明，它以微观经济问题作为其讨论对象．你可能指望，在这个前言中，对于微观经济学的核心概念与主要结论能有所阐发；至少应当开宗明义，告诉你什么是微观经济学，就如大多数中外微观经济学著作所作的那样．一本经济学著作这样开头，当然顺理成章，亦于读者有益；这类书中不少开门见山的长篇宏论，就使本书作者深为折服．然而，我却不打算效法他们．对于可能为此而感到失望的读者，我除了表示遗憾之外，不能不以另外一番议论作为补偿，虽不能称为宏论，亦不失为一家之言．

你想必已注意到书名中的"数理分析"一词．如此称呼，当然不是哗众取宠，而是宗旨所在．在当今世界，一门科学之后或之前缀以数理二字，不仅没有标新立异之嫌，简直可以说是一种时尚了．不必说，你已熟悉解析力学、数学物理、数理生物学一类的学科；你也不会惊异于数理遗传学、数理地质学的崛起；甚至数理社会学与数理语言学也不是出于臆造了．凡此种种，不过昭示了一个不可抗拒的历史潮流：科学的数学化．想将科学变成一个可以论证的严密系统——文明人类的这样一种不可抑止的永恒冲动，今天到处都在造成数学对其他学科的无情入侵．微观经济学，只不过是众多被征服的领域中较为突出的一例罢了．

在看来远离数学的领域——你可能觉得经济学就正是这样的领域——运用数学方法，会是有效的吗?这一直是烦扰科学界的问题，它始终纠缠着你，使你挥之不去．你不可能从理性思考中得到解脱，回答只能来于实践，而实践从来都是属于全人类且属于历史的．如果你直截了当地提出：微观经济的数理分析是有效的吗？作者当然无法回避，只能说：迄今已有的材料给人印象深刻地证明

了，数理方法在经济学领域具有难以比拟的优势；然而，最终的结论仍然深深地隐藏在未来的历史长河中，此中玄机，非作者所敢言也．经济学应当运用数学方法，还是其他方法，这不是此处所适宜谈论的问题．

如果说，是否运用数学方法完全是个人的选择，那么，一旦决定运用数学方法，对于是否要遵守数学的严格标准，就很少有选择余地了．这一点不会使各个领域的专家感到高兴，但他们最终会发现，任何抵制与偷换都将无济于事．

为科学界认可的数理方法的通则是：首先必须以完全形式化的语言将所研究的问题归纳为一个数学系统，这意味着提出某个数学模型；其次，针对模型所涉及的对象，必须提出适当的假设；然后，必须严格地依据逻辑规则利用所作的假设及已知数学理论，推演出各种结论并作出具体解释．数理方法的力量恰好在于：整个理论都建立在为数不多的几条基本假设的基础之上．如果你承认所用的假设是合理的，那么你就不可能拒绝由这些假设严格推演出来的任何一条具体结论，因为人们对于数学方法的可靠性是深信不疑的．

另一方面，数学方法的局限性也集中表现在假设上：数学方法不仅不可能自动保证假设的合理性，而且，为适应运用特定数学工具的需要，人们往往有意提出很强的假设而将问题人为地简化．科学界普遍承认，适当的简化为任何有效的研究所必需．然而问题在于：怎么知道这种简化是否过头了？惟因如此，你对于通过无可挑剔的数学方法得出来的结论，依然会满腹疑虑，因为对这些结论据以推出的假设，并无完全的信用．

尽管如此，你也只能将怀疑的目光投向理论由之出发的假设，而不至于否定方法本身．假设总是可以修改的，且整个科学史在一定意义上正是不断修改假设的历史．数理方法的巨大优势与力量之源泉正在于，它为科学提供了一个具有更新机制的理论建造模式．它从来不将一些来自直接归纳的结论宣布为绝对真理，它只承

认“在某个条件下必有某个结论”这样的相对真理. 它避开了追根究底，从而以一种狡黠的方式使自己永远立于不败之地. 你对数理微观经济学的结论不以为然吗？那很好，就让我们一起来审察一下，究竟是哪些假设不当，看是否有办法加以修正. 如果修正之后仍然不能令人满意，还有继续改进的余地，或者干脆采用新的数学模型. 总之，你所面对的，是这样一个学科：它并非在今天自诩为绝对真理但明天就被宣布过时，它承认自己远未完善，仍处在不断更新之中. 今天的微观经济学，未必有哪一条结论值得让你奉为金科玉律；但对于由方程、公式与数字所表达的结论将越来越准确地描述现实的经济，你完全可以抱有信心，而这也就够了.

现代数理方法对于人类认知理论的一个重大贡献是，它以无可争辩的明晰性，将它所处理的概念区分为原生的与派生的两类. 一个理论由之出发的基础概念是原生的，它们构成定义其他概念的基础，而其本身则是不可定义的，除非你执意将一些并无实质意义的同语反复当做定义. 如同数学中的点、集合等概念都不可定义一样，经济学中的偏好、商品等概念严格说来也是不可定义的. 不要以为这是什么很可悲的事情. 不能在逻辑上给出定义，并不意味着不可从心智上加以理解与把握. 这种基于观察、联想、体验与归纳的认知过程，并不能纳人逻辑的范畴之内，这使得不同认识功能区分明确了. 你会发现，本书很少花篇幅去解释消费、效用、生产、商品这类基本经济概念，这当然不意味着它们不重要，不需要反复推敲，但这不是对业已确立的数学模型进行逻辑分析所必需的. 例如，对于用偏好公理展开的消费理论来说，所讨论的消费品是物质的、精神的或其他类型的，完全无关紧要，也不必去确切界定. 这样做不仅回避了一个历来使人心烦的问题，而且使所建立的理论具有作各种不同解释的广阔余地. 只有在考虑将理论结果应用到某一具体经济问题时，你才感到有必要仔细地识别，对于理论概念所作的解释是否是适当的.

本书的大多数内容，作者在华中科技大学给研读数理经济学

的硕士生与博士生讲授过. 作者感到,本书所采用的这样的材料安排与处理方式,可能使读者能较快地完成从最基本的微观经济学修养到较深入的现代理论的过渡. 凡具有微积分学、线性代数、基本的概率论及最优化理论知识的读者,都可以顺利阅读本书. 当然,如果读者在集合论及分析数学领域有较好的修养,对于本书内容将更容易获得深入的理解. 读者在初次阅读时,不妨跳过那些打星号的节.

本书得以顺利出版,完全有赖于华中科技大学出版社的大力支持,对此,作者不胜感激,谨致深切谢意.

作　者

2001 年 7 月于武汉

记号与约定

$B_{p,w}$　Walras 预算集

C^r　具有 r 阶连续(偏)导数的函数类

$C(D)$　D 上的连续实函数之全体

$C(\cdot)$　选择规则或成本函数

CMP＝成本最小化问题

co$A$　集 A 的凸包

det$\boldsymbol{A}=|A|$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

Δx　变量 x 的增量，如 $\Delta x=x'-x$

$\Delta(S_i)$　由 S_i 生成的混合策略之集

∂A　集 A 的边界

E_{yx}　变量 y 对 x 的弹性

EMP＝支出最小化问题

e_i　$\mathbf{R}^l$ 的标准基向量，即 $e_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$

$e(p,u)$　消费者的支出函数

$F(\cdot)$　分布函数或社会福利泛函

Γ_E　展开型对策

Γ_N　正规型对策

$h(p,u)$　Hicks 需求函数

I　个体(消费者、厂商)集

J　厂商集

K-T 条件　Kuhn-Tucker 一阶最优性条件

$\mathscr{L}$　Lagrange 函数、彩票空间

L　商品种数、彩票

max$U$　集 $U \subset \mathbf{R}^I$ 的极大元之全体

PMP＝利润最大化问题

p　通常记价格向量

π　通常记利润或概率

$\pi(\cdot)$　利润函数

q　通常记产量

$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$；　$\mathbf{R}_+^N=(\mathbf{R}_+)^N$

$\mathbf{R}_{++}^N$　$\mathbf{R}_+^N$之内部

$\mathbf{R}^{m\times n}$　$m\times n$ 阶矩阵之全体

S　状态集、策略集

$S(p,w)$　Slutsky 矩阵

$\Sigma_i=\Delta(S_i)$

U　效用可能性集

$U_x=\{y:y\geqslant x\}$　上围道集

UMP＝效用最大化问题

$U(\cdot)$与 $u(\cdot)$　效用函数

$v(p,w)$　间接效用函数

W,w　通常表财富、工资

(WA)＝显示偏好弱公理

$W(\cdot)$　记福利函数

X　选择集、消费集

$x(p,w)$　Walras 需求函数

Y　通常记生产集

$y(p)$　供应函数

z　通常表示生产的投入

ω　通常记禀赋

$\triangleq$　定义为

□　证明完毕

几点说明

1. 引证 1.1(1-1)表示1.1节中式(1-1);第一章中的定义、命题、定理、例分别记为定义1.1、命题1.1、定理1.1与例1.1.

2. 指标的用法 若用 I 作指标集,则约定 $I=\{1,2,\cdots,I\}=\{i:1\leqslant i\leqslant I\}$. 出现于 $\sum,\prod,\cup,\cap$ 下的指标通常省略. 给定 $x\in\mathbf{R}^I$, $f:D\to\mathbf{R}^I$, 自动认定 $x=(x_i)=(x_1,\cdots,x_I)$, $f=(f_i)=(f_1,\cdots,f_I)$;约定 $x=(x_i,x_{-i})$, $x_{-i}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_I)$;相应地

$$S_{-i}=S_1\times\cdots\times S_{i-1}\times S_{i+1}\times\cdots\times S_I.$$

3. 向量 $x\in\mathbf{R}^{IJ}$可等价地写成三种形式:

$$\begin{aligned}x&=(x_{11},\cdots,x_{1J},\cdots,x_{I1},\cdots,x_{IJ})\\&=(x_1,\cdots,x_I)(x_i=(x_{i1},\cdots,x_{iJ})\in\mathbf{R}^J)\\&=(x_1,\cdots,x_J)(x_j=(x_{1j},\cdots,x_{Ij})\in\mathbf{R}^I).\end{aligned}$$

对 $x\in\mathbf{R}^{IJK}$可类似处理. 涉及代数运算时向量总看作列向量.

4. 向量序 对于 $x,y\in\mathbf{R}^I$,约定

$$x\leqslant y\Leftrightarrow y\geqslant x\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i\quad(1\leqslant i\leqslant I);$$

$$x<y\Leftrightarrow y>x\Leftrightarrow x\leqslant y\neq x;$$

$$x\ll y\Leftrightarrow y\gg x\Leftrightarrow x_i<y_i\quad(1\leqslant i\leqslant I).$$

5. 集记号 对 $A,B\subset\mathbf{R}^I$, $\alpha\in\mathbf{R}$,约定

$$A\pm B=\{a\pm b:a\in A,b\in B\};$$

$$\alpha B=\{\alpha b:b\in B\};$$

$$-B=\{-b:b\in B\}.$$

6. 序列与极限 $\mathbf{R}^I$ 中的序列记为$\{x^n\}$;

$$\lim_n x^n=x\Leftrightarrow x^n\to x\Leftrightarrow x_i^n\to x_i\quad(1\leqslant i\leqslant I),$$

$\lim_n$ 是$\lim_{n\to\infty}$的缩写.

7. 凸组合 说及凸组合 $\sum \alpha_k x_k$ 时，意指 $x_k(1 \leqslant k \leqslant K)$ 属于某个向量空间，$\alpha_k \geqslant 0$，$\sum \alpha_k = 1$. 两向量 x,y 的凸组合写成 $\alpha x + \alpha' y$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，$\alpha' = 1 - \alpha$. 记号 α' 不加说明地普遍使用.

8. 导数记号 对 $f:\mathbf{R}^L \to \mathbf{R}$ 与 $F:\mathbf{R}^L \to \mathbf{R}^N$，约定

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_L}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial x^{\mathrm{T}}} = \nabla^2 f(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_l \partial x_k}\right] \in \mathbf{R}^{L \times L};$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = F'(x) = \left[\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_l}\right] \in \mathbf{R}^{N \times L}.$$

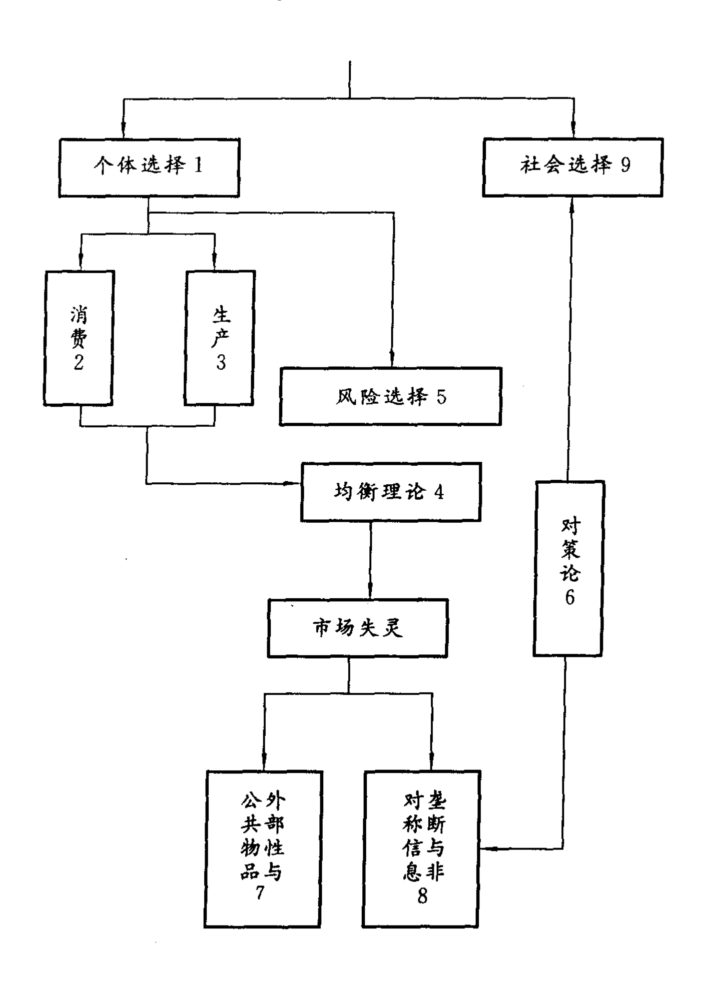
对 $f(x,y)$ 约定 $\nabla_x f(x,y) = \partial f(x,y)/\partial x$.

9. 最优化问题 $\bar{x}$ 是最大化问题

$$\max f(x) = \beta, \quad \text{s.t. } x \in D$$

的解意味着 $\bar{x} \in D$ 且 $f(\bar{x}) = \beta \triangleq \sup\limits_{x \in D} f(x)$，$\beta$ 称为最优值. $x \in D$ 表约束条件，它通常由一组不等式或等式给定.

全书内容系统图



个体选择 1
社会选择 9
消费 2
生产 3
风险选择 5
均衡理论 4
对策论 6
市场失灵
外部性与公共物品 7
垄断与非对称信息 8



作者简介

胡适耕，湖南湘乡人，1967年毕业于湖南大学数学系，现为华中科技大学数学系教授、博士生导师。在拓扑格理论、动力系统、非线性分析、最优化理论、生物数学与经济数学等领域有一系列研究，已发表论文一百余篇，出版数学与经济学著作十余本。代表性著作有《非线性分析》、《最优化原理》、《全球化》、《泛函分析》等。

目　　录

第一章 个体选择

在这本以微观经济现象为研究对象的书中，以考察个体行为作为出发点是很自然的. 个体作为消费者或生产者参与经济活动，因此，个体的消费行为与生产行为，似乎构成最基本的经济行为. 然而，经济学家所关心的并不是消费或生产过程，而是个体对于消费、生产等等所作的决策或选择，正是这些个体选择行为构成全部经济活动的基础. 个体选择无疑是最具多样性的. 现代经济理论的令人注目的成功之一，就是在纷繁杂乱、茫然无序的外表下，发现了个体选择所服从的规律，因而形成了选择理论. 进入所有标准教科书的这一理论的现代形式，即使从数理科学的最严格的标准来看，也是近乎完美的.

对于选择行为的研究，存在两条不同的途径：

(1) 首先引入偏好概念，然后依据偏好进行择优，得出选择结果. 对于偏好的精细分析，通常依赖于偏好的效用表示. 因此，基于偏好与基于效用函数的选择理论，通常是一致的.

(2) 直接描述选择的结果，为此有赖于某个选择规则.

如本章 1.3 节将指明的以上两条途径可以互相转化，在一定情况下(参看下一章)，两者得出非常接近的结果.

1.1 偏好关系

设某一个体面对一个由待择对象组成的集合 X，就称 X 为选择集. 不必限定 X 的具体组成，其中的元素可以是商品、服务、证券、职业等等. 为便于运用数学工具，必要时赋予 X 一定的数学结构，如序结构、向量空间结构与拓扑结构. 最常见的是假定 X 含于

某个 Euclid 空间，例如 $X\subset\mathbf{R}^L$.

1.1.1 偏好

人们相信，理性的选择总是一种择优行为，而择优的依据就是选择者对被选择对象所排定的优劣顺序，这种顺序在经济学中称为偏好. 在形式上，偏好原不过是数学中的一种拟序，因而可得到完全严格的描述.

定义 1.1 X 上的理性偏好，是 X 中元素之间的一种关系 $x\succcurlyeq y$（读作"x 不弱于 y"），它满足以下偏好公理.

(P_1)完全性： $\forall\, x,y\in X, x\succcurlyeq y$ 与 $y\succcurlyeq x$ 两者必居其一（这意味着对选择者来说，X 中任一对元素都是可比较的）.

(P_2)传递性： $x\succcurlyeq y\succcurlyeq z \Rightarrow x\succcurlyeq z$.

偏好无疑是高度个性化的行为倾向，因此谈到某个偏好$\succcurlyeq$时，总是指某一个体的偏好. 不过，对于偏好$\succcurlyeq$的理论分析，偏好的主体是谁并不重要，他可能是某个消费者、厂商，也可能是某个有决策功能的机构或某一群体. 在对偏好所作的分析中甚至不必明确提到这个主体. 定义 1.1 完全不提及关系 $x\succcurlyeq y$ 如何具体判定，这正是公理化方法的特色. 个体究竟依据什么具体标准来决定其偏好，这不是经济学所要回答的问题. 经济分析的基础，只是关于偏好的公理(P_1)、(P_2)及后面相继加入的若干公理. 我们只关心，这些公理将会有哪些推论. 而对于由此建立的整个选择理论的信赖，完全基于对所用偏好公理的信赖. 然而，你能完全信赖偏好公理吗？可以断言，(P_1)、(P_2)这样简单的公理确实得到广泛的经验支持，但也不是无懈可击的. 不过，公理(P_1)、(P_2)对于经济分析是如此基本，人们除了采用之外，看来别无选择.

以下设$\succcurlyeq$是 X 上的给定理性偏好. 下面界定的一些相关术语与记号，在本书中将反复使用. 若 $x\succcurlyeq y\succcurlyeq x$，则说 x 与 y 无差别，记作 $x\sim y$. 若 $x\succcurlyeq y\not\succcurlyeq x$，则说 x 严格优于 y，记作 $x\succ y$. 给定 $x\in X$，令

$$U_x = \{y \in X : y \succcurlyeq x\}; \tag{1-1}$$

$$L_x = \{y \in X : x \succcurlyeq y\}; \tag{1-2}$$

$$I_x = \{y \in X : y \sim x\} = U_x \cap L_x. \tag{1-3}$$

三者分别称为由 x 决定的上围道集、下围道集与无差别集(如图 1-1).

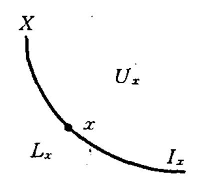


图 1-1

利用公理(P_1)、(P_2)不难证明以下简单结论:

命题 1.1 1° $\forall\, x \in X : x \succcurlyeq x$,即偏好$\succcurlyeq$是自反的.

2° $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y \sim z \Rightarrow x \sim z$ $(\forall\, x, y, z \in X)$. 这意味着$\sim$是 X 上的一个等价关系,I_x 正是 x 所属的等价类.

3° $x \succ y \succcurlyeq z \Rightarrow x \succ z$; $x \succcurlyeq y \succ z \Rightarrow x \succ z$ $(\forall\, x, y, z \in X)$.

4° $\forall\, x, y \in X$,关系 $x \succ y, x \sim y, y \succ x$ 三者必居其一且仅居其一.

以上事实是如此牢固地植根于人类的常识,未必有人能轻易提出异议.但正因为如此,对于理性偏好所确立的结论,才显得格外平凡.当然,我们将设法走得更远些,不过为此得增加一些新的偏好公理,而这正是下面要考虑的.

1.1.2 单调性与连续性

设$\succcurlyeq$是 X 上的理性偏好.至此为止,对于选择集 X 未赋予任何特殊的结构.但谈到单调性与连续性时必定涉及 X 中的序与极限,为此通常假定 $X \subset \mathbf{R}^I$.在经济学中普遍使用 $\mathbf{R}^I$ 中的向量序,有关的记号界定如下:设 $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbf{R}^I$,则

$$x \geqslant y \Leftrightarrow y \leqslant x \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant I);$$

$$x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow x \geqslant y \neq x;$$

$$x \gg y \Leftrightarrow y \ll x \Leftrightarrow x_i > y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant I).$$

向量序$\geqslant$有以下性质.

(1) 自反性： $x \geqslant x$;

(2) 传递性： $x \geqslant y \geqslant z \Rightarrow x \geqslant z$;

(3) 反对称性： $x \geqslant y \geqslant x \Rightarrow x = y$;

(4) 线性性： $x^k \geqslant y^k, \alpha_k \geqslant 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant K) \Rightarrow \sum \alpha_k x^k \geqslant \sum \alpha_k y^k$;

(5) 连续性： $x^n \geqslant y^n \quad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \lim_n x^n \geqslant \lim_n y^n$(假定极限存在).

注意，向量序$\geqslant$与偏好$\succcurlyeq$颇相类似①. 与$\succcurlyeq$一样，$\geqslant$也在 $X(\subset \mathbf{R}^l)$的元素之间确立了一种顺序关系. 当 $x \geqslant y$ 时，x 对于 y 通常具有优势（"多多益善"!），因而很可能蕴涵 $x \succcurlyeq y$. 因此形成以下公理.

(P_3)单调性： 对任何 $x, y \in X$，有

$$x \geqslant y \Rightarrow x \succcurlyeq y, \quad x \gg y \Rightarrow x \succ y.$$

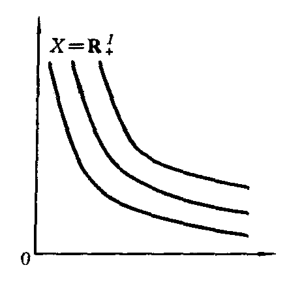


图 1-2

在几何上，单调偏好的无差别集依$\leqslant$增加的方向呈现出一种顺序性（如图 1-2）；而且，每个无差别集内部不存在满足 $x \gg y$ 的两点，因而不可能是"有厚度的".

单调性反映了人的欲望的"无止境"，是一个被广泛接受的假设，对于选择理论的某些部分甚至是必不可少的. 但显然不能说，单调性总是满足的. 例如，对于禁烟者来说，香烟就不是多多益善.

---

① 值得注意的两个相异点是：向量序不是完全的，即并非任一对元素 x, y 可依$\geqslant$比较；偏好一般不是反对称的，即从 $x \succcurlyeq y \succcurlyeq x$ 未必能推出 $x = y$.

两个与(P_3)接近的公理如下.

(P_3')强单调性： $x>y \Rightarrow x\succ y \quad (\forall\ x,y\in X)$.

(P_4)局部非饱和性： 每个 $x\in X$ 的任何邻域中有某个 $y\succ x$.

显然(P_3')$\Rightarrow$(P_3)，对于 $X=\mathbf{R}_+^l$，易见有(P_3)$\Rightarrow$(P_4).(P_4)意味着，个体总可以通过微小的调整来改进自己的选择，这显然推出无差别集是“无厚度”的.(P_4)是一个比单调性更为基本的假设，在大多数场合，它是不可缺少的.

现在考虑大概是最重要的连续性公理.

(P_5)连续性： $x^n\succcurlyeq y^n \quad (\forall\ n\in\mathbf{N}) \Rightarrow \lim\limits_n x^n\succcurlyeq\lim\limits_n y^n$(假定极限存在且属于 X).

在解释连续性之前，先给出它的以下几何刻画.

命题 1.2 对于$\succcurlyeq$以下条件互相等价：

1° $\succcurlyeq$是连续的；

2° $\forall\ x\in X, U_x$ 与 L_x 相对于 X 为闭集(因而 I_x 亦是闭集)；

3° $\forall\ x\in X$，集$\{y\in X: y\succ x\}$与$\{y\in X: x\succ y\}$相对于 X 为开集.

证 直接看出 1°$\Rightarrow$2°$\Leftrightarrow$3°，只需证 3°$\Rightarrow$1°. 设条件 3°满足，$x^n\succcurlyeq y^n(\forall\ n\in\mathbf{N})$，$x^n\to x\in X$，$y^n\to y\in X(n\to\infty)$，但 $y\succ x$，今证由此必引出矛盾. 因$\{z\in X: z\succ x\}$相对于 X 是开集，不妨设 $y^n\succ x(\forall\ n\in\mathbf{N})$. 固定 $n\in\mathbf{N}$，由$\{z\in X: y^n\succ z\}$相对于 X 是开集推出，当 k 充分大时 $y^n\succ x^k$，因而 $x^n\succ y^k$. 固定 n，令 $k\to\infty$得 $x^n\succcurlyeq y$；然后令 $n\to\infty$得 $x\succcurlyeq y$，这与 $y\succ x$ 矛盾. □

集$\{y\in X: y\succ x\}$相对于 X 恒为开集意味着，当 $y\succ x$，$y'\in X$ 充分接近于 y 时必有 $y'\succ x$. 这就表明，偏好关系 $y\succ x$ 不因 y(或 x)的微小变动而改变，因而具有某种稳定性. 这似乎正是个体选择行为的固有特性. 可以认为，连续性假设是得到经验支持的，且它为深入的理论分析所必需.

1.1.3 凸性

现在设 X 是某个向量空间的凸子集，最常用的情形是 $X=\mathbf{R}_+^l$；$\succcurlyeq$是 X 上的一个理性偏好. 如下的凸性公理虽然不是最基本的，但对许多重要结论是必要的.

(P_6)凸性： $x\succcurlyeq z, y\succcurlyeq z \Rightarrow \alpha x+\alpha' y\succcurlyeq z \quad (x,y,z\in X,\alpha\in[0,1]$，此处及今后皆约定 $\alpha'=1-\alpha$).

凸性显示了搭配的优势. 例如，若你的偏好是凸性的，对一个面包与一块糖不加区别，则你不会认为半个面包加半块糖比一个面包差. 很容易举出不满足凸性的例子. 例如周末你可用于看电影或参加球赛. 你不会选择看半场电影并参加半场球赛. 这表明有些搭配并不具有优势. 不过，同一个体在一较长的时期内，或在同一时间许多个体的平均状况，都大致倾向于多样性的选择. 在这个意义上可以说，凸性假设是合理的.

命题 1.3 1° $\succcurlyeq$是凸性的$\Leftrightarrow\forall\ x\in X: U_x$ 是凸集.

2° 设$\succcurlyeq$是凸性的. 则$\{y\in X: y\succ x\}$是凸集；$x\succcurlyeq y \Rightarrow \alpha x+\alpha' y\succcurlyeq y \quad (\forall\ \alpha\in[0,1])$.

证 1° 直接由凸性的定义看出.

2° 设 $y\succ x, z\succ x,\alpha\in[0,1]$. 不妨设 $y\succcurlyeq z$，则

$$\alpha y+\alpha' z\succcurlyeq \alpha z+\alpha' z=z\succ x,$$

可见$\{y\in X: y\succ x\}$是凸集. □

下面附带地列出几条较次要的公理.

(P_6')严格凸性： $x\succcurlyeq z, y\succcurlyeq z, x\neq y \Rightarrow \alpha x+\alpha' y\succ z \quad (\forall\ x,y,z\in X,\alpha\in(0,1))$.

(P_7)序保持性： 设 $x\succ y,\alpha,\beta\in[0,1]$，则

$$\alpha>\beta\Leftrightarrow \alpha x+\alpha' y\succ \beta x+\beta' y.$$

(P_8)中值性： $x\succ y\succ z\Rightarrow$存在惟一 $\alpha\in(0,1)$，使 $\alpha x+\alpha' z\sim y$，即无差别集 I_y 与线段$[x,z]\triangleq\{\alpha x+\alpha' z: 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$有惟一交

点.

一个被广泛引用作为偏好的释例.

例 1.1(字典序偏好) 取 $X=\mathbf{R}_+^2$,定义

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x_1 > y_1$$

或 $$x_1 = y_1, x_2 \geqslant y_2,$$

则$\succcurlyeq$显然是 X 上的理性偏好,它的每个无差别集仅含一点,上围道集 U_x 如图 1-3 所示.如图表明的,U_x 不一定是闭集,因此$\succcurlyeq$不满足连续性公理.其次也容易看出$\succcurlyeq$不满足公理(P_8),而本节所述的所有其他偏好公理都是可验证的.

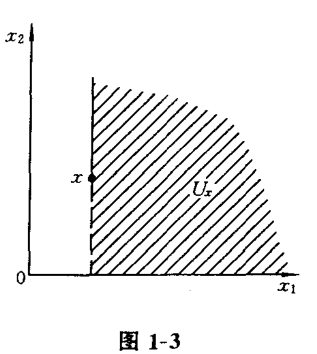


图 1-3

1.2 效用函数

设$\succcurlyeq$是选择集 X 上的一个理性偏好.现在回到上节已提及的问题:选择者依据什么来决定 $x \succcurlyeq y$?已经指出,这一问题从概念上说并不重要;但从方法上考虑就甚有研究的必要.我们设想,选择者心中有一个隐蔽的评价体系,得以对每个 $x \in X$ 赋予恰当的"评分",然后据此评分决定诸元素的优劣顺序.这就是效用函数的概念.通过效用函数,关于偏好的讨论就转化成了对函数关系的讨论,这就使得有可能运用一些强有力的数学分析工具.

1.2.1 效用概念

首先给出以下定义.

定义 1.2 若函数 $u: X \to \mathbf{R}$ 满足条件:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geqslant u(y) \quad (\forall\, x, y \in X), \tag{1-4}$$

则称 $u(\cdot)$为偏好$\succcurlyeq$的效用函数,或说 $u(\cdot)$是$\succcurlyeq$的一个效用表示.

若 $u(\cdot)$ 是 $\succcurlyeq$ 的效用函数，则直接从条件(1-4)推出

$$x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y);$$
$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y).$$

这样，元素 x 与 y 之间的关系 $x \succ y, x \sim y, y \succ x$，就转化成了数量 $u(x)$ 与 $u(y)$ 之间的关系 $>, =, <$，后者无疑更便于处理与把握. 相应地，$\succcurlyeq$ 的无差别集现在表为方程 $u(x)=\text{const}$，这就有可能充分利用 $u(\cdot)$ 的性质得出无差别集的形态. 例如，若 $X=\mathbf{R}^I$ 而 $u(\cdot)$ 是线性函数，则无差别集必为超平面.

设 $u(\cdot)$ 是 $\succcurlyeq$ 的效用函数. 若 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一严格增函数，则直接看出 $v(\cdot)=f(u(\cdot))$ 亦是 $\succcurlyeq$ 的效用函数. 例如，$\alpha u(\cdot)+\beta$ $(\alpha>0)$ 与 $e^{u(\cdot)}$ 都是 $\succcurlyeq$ 的效用函数. 另一方面，若 u, v 都是 $\succcurlyeq$ 的效用函数，$D=u(X) \triangleq \{u(x): x \in X\}$，定义

$$f: D \to \mathbf{R}, \quad u(x) \to v(x),$$

则显然 $v(\cdot)=f(u(\cdot))$，且易验证 $f(\cdot)$ 是 D 上的严格增函数. 这就表明，$\succcurlyeq$ 的全体效用函数可从一个特定的效用函数通过严格增加的变换得到.

设 $u(\cdot)$ 是 $\succcurlyeq$ 的效用函数，对于给定的 $x \in X$，总可以通过适当调整 β 而使 $u(x)+\beta$ 等于任何实数. 这表明 $u(x)$ 的数量并无独立的内在意义，它只在与 $u(y)(y \in X)$ 进行比较时才起作用. 尽管我们也采用"x 的效用水平 $u(x)$"这种说法，但不应将它用作 x 的价值的量度(完全可能 $u(x)<0$!)，更不能随便比较不同个体的效用函数来评判其偏好程度.

1.2.2 效用函数的性质

设 $u(\cdot)$ 是偏好 $\succcurlyeq$ 的效用函数，下面逐个讨论公理 (P_3)～(P_6) 所对应的 $u(\cdot)$ 的性质.

1. 单调性 设 $X \subset \mathbf{R}^I$，$\geqslant$ 是 $\mathbf{R}^I$ 上的向量序. 分别将 $x \succcurlyeq y$ 与 $x \succ y$ 换成 $u(x) \geqslant u(y)$ 与 $u(x) > u(y)$，得出 (P_3) 的等价刻画为

$$x \geqslant y \Rightarrow u(x) \geqslant u(y), \quad x \gg y \Rightarrow u(x) > u(y); \quad (1\text{-}5)$$

而(P_3')的等价刻画是

$$x > y \Rightarrow u(x) > u(y). \qquad (1\text{-}6)$$

当 $u(\cdot)$满足条件(1-5)与(1-6)时,分别说 $u(\cdot)$是严格单调增函数与强单调增函数①. 于是可以说,偏好$\succcurlyeq$是单调的与强单调的,分别等价于其效用表示是严格单调增函数与强单调增函数.

2. 局部非饱和性 设 $X\subset \mathbf{R}^l$. 容易看出,(P_4)的反面是:存在 x 及 x 的某个邻域 V,$\forall\ y\in V\cap X$,有 $x\succcurlyeq y$. 以 $u(x)\geqslant u(y)$代替 $x\succcurlyeq y$ 得出 x 是 $u(\cdot)$的局部极大值点. 因此,$\succcurlyeq$是局部非饱和的$\Leftrightarrow$ $u(\cdot)$在 X 上没有局部极大值点.

3. 连续性 设 $X\subset \mathbf{R}^l$,$u(\cdot)$在 X 上连续,$x^n\succcurlyeq y^n$,$x^n\rightarrow x\in X$,$y^n\rightarrow y\in X(n\rightarrow\infty)$,则

$$\begin{aligned} x^n \succcurlyeq y^n &\Rightarrow u(x^n) \geqslant u(y^n) \\ &\Rightarrow u(x) \geqslant u(y) \qquad (u(\cdot)\ \text{连续}) \\ &\Rightarrow x \succcurlyeq y, \qquad (\text{用式(1-4)}) \end{aligned}$$

可见$\succcurlyeq$连续. 这表明 u 连续$\Rightarrow\succcurlyeq$连续. 但反向推理是行不通的,因即使$\succcurlyeq$有一个连续效用表示 v,只要 $f(\cdot)$是不连续的严格增函数,就可能得到$\succcurlyeq$的不连续效用表示 $u(\cdot)=f(v(\cdot))$.

4. 凸性 设 X 是某向量空间的凸子集. 将$\succcurlyeq$,$\succ$分别换成相应效用值之间的$\geqslant$,$>$,就得到(P_6)、(P_6')的等价刻画分别为

$$u(x),u(y) \geqslant u(z) \Rightarrow u(\alpha x + \alpha' y) \geqslant u(z) \qquad (\forall\ \alpha \in [0,1]);$$

$$u(x),u(y) \geqslant u(z),x \neq y \Rightarrow u(\alpha x + \alpha' y) > u(z) \qquad (\forall\ \alpha \in (0,1)),$$

其中,$x,y,z\in X$ 是任意的. 以上两条件又分别等价于

$$u(\alpha x + \alpha' y) \geqslant \min\{u(x),u(y)\} \qquad (x,y \in X,\alpha \in [0,1]); \qquad (1\text{-}7)$$

---

① 若 $u(\cdot)$仅满足 $x\succcurlyeq y\Leftrightarrow u(x)\geqslant u(y)$,则称 $u(\cdot)$为单调增函数. 本书中用到单调增、严格单调增及强单调增函数时,都按此处的规定理解.

$$u(\alpha x + \alpha' y) > \min\{u(x), u(y)\}$$
$$(x, y \in X, x \neq y, \alpha \in (0,1)). \qquad (1\text{-}8)$$

当 $u(\cdot)$满足条件(1-7)与(1-8)时,分别说 $u(\cdot)$是拟凹函数与强拟凹函数. 于是可以说,偏好$\succcurlyeq$是凸的与严格凸的,分别等价于其效用表示是拟凹函数与强拟凹函数. 据此并结合命题 1.3,容易得到以下命题.

命题 1.4 $u(\cdot)$是拟凹函数$\Leftrightarrow \forall\ \alpha \in \mathbf{R}: X(u \geqslant \alpha) \triangleq \{x \in X : u(x) \geqslant \alpha\}$是凸集;$u(\cdot)$是严格凹函数$\Rightarrow u(\cdot)$是强拟凹函数;$u(\cdot)$是凹函数$\Rightarrow u(\cdot)$是拟凹函数. 因此 $u(\cdot)$是严格凹函数$\Rightarrow$ $\succcurlyeq$严格凸,$u(\cdot)$是凹函数$\Rightarrow \succcurlyeq$是凸性的.

容易指出,为使$\succcurlyeq$是凸的,远不必要求 $u(\cdot)$是凹的. 例如在 $X = \mathbf{R}$ 上,任何单调增(或单调减)函数 $u(\cdot)$必定满足条件(1-7),因而是拟凹函数. 例如,严格凸函数 $u(x) = \mathrm{e}^x$ 就是拟凹函数,它当然不可能是凹函数.

用一个典型例子来解释上述结论.

例 1.2(Cobb-Douglas 效用函数) 考虑 $X = \mathbf{R}_+^2$上的效用函数

$$u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \qquad (1\text{-}9)$$

其中,α, β 是正常数. $u(\cdot)$显然是连续的、严格单调增的,在 $\mathbf{R}_{++}^2$ 内是强单调增的. 经直接计算得出

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}(x) = \begin{bmatrix} -\alpha\alpha' x_1^{\alpha-2} x_2^\beta & \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & -\beta\beta' x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{bmatrix};$$

$$|\nabla^2 u(x)| = \alpha\beta(1 - \alpha - \beta) x_1^{2\alpha-2} x_2^{2\beta-2}.$$

可见,当 $\alpha + \beta < 1, x \gg 0$ 时,$|\nabla^2 u(x)| > 0$,从而矩阵$\nabla^2 \boldsymbol{u}(x)$是负定的. 这就推出,当 $\alpha + \beta < 1$ 时,$u(\cdot)$在 $\mathbf{R}_{++}^2$内是严格凹函数. 令 $\alpha + \beta \to 1$ 取极限得出,当 $\alpha + \beta \leqslant 1$ 时,$u(\cdot)$在 $\mathbf{R}_+^2$上是凹函数. 因此,由 $u(\cdot)$所表示的偏好$\succcurlyeq$是连续的、单调的、局部非饱和的、当 $\alpha + \beta \leqslant 1$ 时是凸性的、当 $\alpha + \beta < 1$ 时在 $\mathbf{R}_{++}^2$内是严格凸的与强单

调的.

1.2.3 存在定理

应用效用函数研究偏好及选择问题的前提，是表示给定偏好的效用函数存在，最好还具有较好的性质，例如连续性或可微性等. 因此，关于效用函数存在性的定理在选择理论中具有基本意义. 以下就是一个令人满意的存在定理.

定理 1.1(Debreu，1954)　设$\succcurlyeq$是$X=\mathbf{R}_+^l$上的理性偏好，则$\succcurlyeq$具有连续效用表示的充要条件是$\succcurlyeq$满足连续性公理(P_5).

证　显然只需证充分性，即假定$\succcurlyeq$满足(P_5)，构造出$\succcurlyeq$的一个连续效用函数. 为简化证明，假定$\succcurlyeq$也是单调的. 令$e=(1,1,\cdots,1)\in X$，定义

$$u(x)=\sup\{\alpha\geqslant 0: x\succcurlyeq \alpha e\}. \qquad (1\text{-}10)$$

1° 验证$u(\cdot)$合理定义. 给定$x\in X$. 因恒有$x\succcurlyeq 0$，故$0\in\{\alpha\geqslant 0: x\succcurlyeq\alpha e\}$. 取$\alpha>0$充分大，使$\alpha e\gg x$，则$\alpha e\succ x$，故$u(x)\leqslant\alpha<\infty$. 因此$u(\cdot)$是$X$上的有限实函数.

2° 验证$u(\cdot)$是$\succcurlyeq$的效用函数. 取定$x\in X$. 由式(1-10)，有$\alpha_n\to u(x)(n\to\infty)$，使$x\succcurlyeq\alpha_n e(\forall\, n\in\mathbf{N})$. 由$\succcurlyeq$的连续性，这得出$x\succcurlyeq u(x)e$. 若$x\succ u(x)e$，则由$\{y: x\succ y\}$是$X$中的开集(命题 1.2)得出，存在$\alpha>u(x)$，使$x\succ\alpha e$. 但这推出$u(x)\geqslant\alpha$，得出矛盾. 因此$x\sim u(x)e$. 于是对任给$x,y\in X$有

$$x\succcurlyeq y\Leftrightarrow u(x)e\succcurlyeq u(y)e$$
$$\Leftrightarrow u(x)\geqslant u(y), \qquad \text{(用单调性)}$$

可见$u(\cdot)$是$\succcurlyeq$的效用函数.

3° 验证$u(\cdot)$连续. $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}_+$，

$$X(u\geqslant\alpha)\triangleq\{x\in X: u(x)\geqslant\alpha\}$$
$$=\{x\in X: x\succcurlyeq\alpha e\}=U_{\alpha e}$$

是闭集；同理$X(u\leqslant\alpha)$亦是闭集，因此$u(\cdot)$连续. □

由定理 1.1 推出，字典序偏好$\succcurlyeq$(例 1.1)就不可能有连续的

效用函数. 实际上，$\succcurlyeq$没有任何效用函数：若 $u(\cdot)$是$\succcurlyeq$的效用函数，则对任给 $x \in \mathbf{R}_+$，存在有理数 r_x，使得

$$u(x,1) < r_x < u(x,2).$$

因 $x<y \Rightarrow u(x,2)<u(y,1) \Rightarrow r_x<r_y$，故$\{r_x : x \in \mathbf{R}_+\}$与 $\mathbf{R}_+$成一一对应，这与有理数集的可数性矛盾.

亦可基于连续性以外的条件建立存在定理，下举一例.

命题 1.5 设 X 含于某个向量空间，$\succcurlyeq$是 X 上的理性偏好，且满足公理(P_7)，(P_8)，则$\succcurlyeq$有效用表示.

证 就一特殊情况证之：设 $a,b \in X$，使 $b \succcurlyeq x \succcurlyeq a (\forall\ x \in X)$，不妨设 $b \succ a$. 若 $b \succ x \succ a$，则由(P_8)，有惟一 $\alpha \in (0,1)$，使 $x \sim \alpha' a + \alpha b$，定义 $u(x)=\alpha$. 若 $x \sim a$，则定义$u(x)=0$；如果 $x \sim b$，则定义 $u(x)=1$. 这就得到函数 $u : X \to [0,1]$. 任给 $x_1, x_2 \in X$，有

$$x_i \sim [1-u(x_i)]a + u(x_i)b \quad (i=1,2).$$

由 $u(\cdot)$的定义显然有 $u(x_1)=u(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$，而由公理$(P_7)$有 $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow u(x_1)>u(x_2)$. 因此 $u(\cdot)$是$\succcurlyeq$的效用表示. □

*1.3 选择规则

选择理论的最终目的，是建立一定的规则，使之能用以预测选择结果. 为达此目的，既可以从研究选择所依据的标准(例如偏好或效用函数)入手，亦可直接研究选择行为本身. 后一途径就是本节所要考虑的.

1.3.1 选择结构

设 X 是给定的选择集，此处无须对它作任何特殊限定. 为直接描述个体在 X 上的选择行为，形式上，只需确立选择范围与选择结果之间的某种对应关系. 给定 X 的一族非空子集，其全体记作 $\mathscr{B}$. 每个 $B \in \mathscr{B}$ 称为预算集，它可看做一次选择实验，即决策者在 B 中完成一次选择行为. 在 B 中选择的结果得到 B 的一个非空

子集，记作 $C(B)$，它可看做被选中的对象之全体，它可能含一个以上的元素. 这就得到一个定义于 $\mathscr{B}$ 上的函数 $C(\cdot): B \to C(B)$，称之为选择函数或选择规则，而称 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 为 X 上的一个选择结构.

以上的描述完全不触及如何从 B 得出 $C(B)$，也不涉及 $x \in C(B)$ 有何优势. 如此抽象地谈论选择，似乎毫无用处. 确实，以上所述除了指明"选择总在确定的集合上进行，每次选择都有确定结果"之外，别无内容. 然而，正需要由这样一个一般描述所确立的框架. 现已明确，需要阐明的正是选择函数 $C(\cdot)$ 的性质. 当然，要做到这一点不能无所凭借，必定需要某些关于 $C(\cdot)$ 的假设，下面的假设是最基本的.

显示偏好弱公理(WA)(Samuelson, 1947)　任给 $B, B' \in \mathscr{B}$，若 $\{x, y\} \subset B \cap B'$，$x \in C(B)$，$y \in C(B')$，则 $\{x, y\} \subset C(B) \cap C(B')$.

这一公理的直观意义不像偏好公理那么明显，因此需作点说明. 若(WA)不满足，则存在这样的 $B, B' \in \mathscr{B}$，$x, y \in B \cap B'$，使得 $x \in C(B)$，$y \in C(B')$，但 $x \overline{\in} C(B')$(或 $y \overline{\in} C(B)$). 这意味着，尽管 x, y 都属于 B'，但选择者选中了 y 而未选中 x，他必定认为 y 优于 x；另一方面，x, y 也同属于 B，而同一选择者在 B 中作选择时看中了 x，无论他选择 y 与否，都表明他认为 x 并不次于 y，这就与 y 优于 x 的判断不一致了. 由此可见，从常识看来，(WA)是不能违背的.

以上分析已显示出选择与偏好有自然的联系，下面就来讨论这种联系.

1.3.2　选择与偏好

选择与偏好之间的关系可从两个相反的方向来考虑.

首先，考虑从选择结构导出偏好. 设 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 是 X 上的一个选择结构. 对于 $x, y \in X$，定义

$$x \succcurlyeq^* y \Leftrightarrow \exists\, B \in \mathscr{B}: x \in C(B), \quad y \in B. \qquad (1\text{-}11)$$

这就在 X 上定义出一个二元关系 $\succcurlyeq^*$，称它为选择规则 $C(\cdot)$ 导出的偏好，或称为显示偏好关系. 当 $x \succcurlyeq^* y$ 时，说 x 显得不弱于 y. 若选择者面对 x, y 时选择了 x，无论他是否同时选择 y，都可断定 x 显得不弱于 y，这正是偏好 $\succcurlyeq^*$ 的直观意义. 尽管 $\succcurlyeq^*$ 的定义似乎是很自然的，但若不对 $C(\cdot)$ 作一定限制，就无法保证 $\succcurlyeq^*$ 有什么性质，甚至不能断定 $\succcurlyeq^*$ 满足偏好的完全性与传递性公理，因而 $\succcurlyeq^*$ 未必是定义 1.1 意义上的理性偏好.

其次，考虑从偏好导出选择结构. 设 $\succcurlyeq$ 是 X 上的一个偏好，$\mathscr{B}$ 是 X 的某些非空子集组成的集族. 对任何 $B \in \mathscr{B}$，令

$$C^*(B) = \{x \in B : x \succcurlyeq y \quad (\forall\, y \in B)\}. \qquad (1\text{-}12)$$

直观上很明显，$C^*(B)$ 正是由 B 中按偏好 $\succcurlyeq$ 最优的元素组成. 若 $\forall\, B \in \mathscr{B}$，有 $C^*(B) \neq \varnothing$，则 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot))$ 是 X 上的一个选择结构，称它为由偏好 $\succcurlyeq$ 导出的选择结构，记作 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succcurlyeq))$.

如此看来，X 上的偏好与选择结构已有某种对应关系. 那么，与理性偏好对应的是什么呢? 原来这与(WA)有关.

定理 1.2(Arrow,1959) 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的某些非空子集组成的集族.

1° 若 $\succcurlyeq$ 是 X 上的理性偏好，则 $C^*(\cdot, \succcurlyeq)$ 满足(WA)；

2° 若 $\mathscr{B}$ 包含了 X 的所有不超过 3 个元素的非空子集，$C(\cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的选择规则且满足(WA)，则导出偏好 $\succcurlyeq^*$ 是理性的且 $C^*(\cdot, \succcurlyeq^*) = C(\cdot)$.

证 1° 设 $B, B' \in \mathscr{B}$，$x, y \in B \cap B'$，$x \in C^*(B)$，$y \in C^*(B')$. $\forall\, z \in B$，由式(1-12)有 $y \succcurlyeq x \succcurlyeq z$，从而 $y \succcurlyeq z$，这表明 $y \in C^*(B)$. 同理 $x \in C^*(B')$，可见 $C^*(\cdot, \succcurlyeq)$ 满足(WA).

2° 首先证 $\succcurlyeq^*$ 是理性的. 任给 $x, y \in X$，令 $B = \{x, y\}$，则 $B \in \mathscr{B}$. 因 $C(B) \neq \varnothing$，不妨设 $x \in C(B)$，因而由式(1-11)有 $x \succcurlyeq^* y$. 这表明 $\succcurlyeq^*$ 是完全的. 若 $x, y, z \in X$ 满足 $x \succcurlyeq^* y \succcurlyeq^* z$，则由式(1-11)有 $B, B' \in \mathscr{B}$，使得 $x \in C(B)$，$y \in B \cap C(B')$，$z \in B'$. 令 $B'' = \{x, y,$

$z\}$，则 $B''\in\mathscr{B}$. 若 $x\in C(B'')$，则 $x\geqslant^* z$. 若 $y\in C(B'')$，则由（WA）推出 $x\in C(B'')$，从而亦有 $x\geqslant^* z$. 若 $z\in C(B'')$，则由（WA）推出 $y\in C(B'')$，从而如上一样有 $x\geqslant^* z$. 这就证明了 $\geqslant^*$ 的传递性.

其次证 $C^*(B,\geqslant^*)=C(B)$，$B\in\mathscr{B}$ 是任意取定的. 易见 $C(B)\subset C^*(B,\geqslant^*)$. 若 $x\in C^*(B,\geqslant^*)$，任取 $y\in C(B)$，则 $x\geqslant^* y$，于是有 $B'\in\mathscr{B}$，使 $x\in C(B')$，$y\in B'$，因此由（WA）推出 $x\in C(B)$. 由此证得 $C^*(B,\geqslant^*)\subset C(B)$. □

所证定理表明，在 $\mathscr{B}$ 包含的集充分多（例如包含 X 的所有非空子集）的情况下，$\mathscr{B}$ 上满足（WA）的选择规则与 X 上的理性偏好成一一对应. 可以用很简单的例子说明，定理的结论 2°所要求的条件"$\mathscr{B}$ 包含 X 中所有不超过 3 个元素的非空子集"不可除去.

例 1.3 取 $X=\{x,y,z\}$，$\mathscr{B}=\{\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\}\}$. 定义

$$C(\{x,y\})=\{x\},\quad C(\{y,z\})=\{y\},\quad C(\{z,x\})=\{z\},$$

则 $C(\cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的一个选择结构，它平凡地满足（WA）. 依式(1-11)有

$$x\geqslant^* y,\quad y\geqslant^* z,\quad z\geqslant^* x.$$

因 $y\geqslant^* x$ 必不成立，故 $\geqslant^*$ 不具传递性. 这就表明，尽管 $C(\cdot)$ 满足（WA），但它导出的偏好 $\geqslant^*$ 不是理性的.

鉴于要求 $\mathscr{B}$ 包含所有不多于 3 个元素的非空子集远不是现实的，对于定理 1.1 所建立的理性偏好与满足（WA）的选择规则的对等性，不能给予过高的评价.

第二章 消 费

我们已在上一章中为个体选择建立了一个一般的理论框架，现在得针对更具体的经济行为深入展开讨论了. 消费与生产，无疑是最值得考察的两大领域，其中消费尤其是优先考虑的对象. 这首先在于，消费在经济活动中起基本作用；同时也在于，它作为一种个体选择行为表现出某种纯粹性与典型性. 个体选择理论的主要概念，如偏好与选择规则等，正是从消费行为的研究中形成的，这些概念的运用在消费理论中获得了最大的成功.

为了便于应用分析工具，同时也考虑到直观性的需要，本章将主要采用基于效用函数的方法. 从数学上看，这一方法无非是不等式约束最优化理论的直接应用. 对于已具有数学规划的基本知识的读者，这不会是特别严重的挑战.

2.1 效用最大化

2.1.1 效用最大化问题

如果一消费者面对选择集 X，他的偏好与效用函数分别为 $\succcurlyeq$ 与 $u(\cdot)$，那么，他的选择行为可归结为：在其支付能力所及的范围内实现效用最大化. 在数学上这意味着，消费者所选择的 $\bar{x} \in X$，应是最大化问题

$$\max u(x), \quad \text{s.t. } x \in B \tag{2-1}$$

的解，其中 B 是由 X 及消费者的经济约束所决定的预算集. 因此，消费者的选择问题，原不过是一个约束最大化问题.

但我们还不能立即着手对问题(2-1) 进行数学分析. 对于其

中的 $u(\cdot)$ 与 B,所知的信息都太少,需要某些预备性讨论.

首先指出,选择集 X 含于某个商品空间 $\mathbf{R}^L$,称为消费集. 每个 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_L)\in\mathbf{R}^L$ 解释为一束商品,称为商品向量,其中 $x_l(1\leqslant l\leqslant L)$ 表示商品 l 的数量①. 虽然通常假定 $x_l\geqslant 0$,但亦不必绝对排除 $x_l<0$ 的情况:$x_l<0$ 可解释为商品 l 的借出量为 $|x_l|$. 商品中可包含服务、资产等. 应将哪些项目包括在商品之内及各种商品应如何计量,是一个实际的经济统计问题,不是此处的讨论对象. 消费者的选择范围也不会是整个空间 $\mathbf{R}^L$,他必然受到生理的约束及物理法则的限定. 例如,设消费者日消费两种商品:$x=$(面包,游艺),二者分别以克与小时为计量单位,则消费集 $X\subset[0,\infty)\times[0,24]$. 因具体情况不同,$X$ 亦形态各异,究竟如何决定,不在此处讨论之列. 为分析方便,在未作特别说明时,总假定 $X=\mathbf{R}^L_+$.

其次,由于消费者还受到经济上的约束,他实际上只能在一个比 X 更小的集 B 内挑选商品. B 决定于两个因素:消费者的财富(或可支配收入)w 与商品的市场价格. 假定消费者置身于一个规模充分大的商品市场中,商品的市场价格总是公开的;消费者对于商品价格毫无影响力,因而只是价格接受者. 以 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_L)\in\mathbf{R}^L$ 表示一组价格,称为价格向量,其中 $p_l(1\leqslant l\leqslant L)$ 表示商品 l 的价格. 通常假定 $p_l>0$,不过也不完全排除 $p_l\leqslant 0$ 的情况:对于免费商品有 $p_l=0$;而对于"垃圾"则有 $p_l<0$,这表示"消费"单位有害物品得到的补偿. 在价格 p 之下,消费 $x\in\mathbf{R}^L$ 的支付就是 $p\cdot x=\sum p_lx_l$,它必须以不超过消费者的财富 w 为限. 因此,消费者的选择被约束在以下集内

$$B_{p,w}=\{x\in X:p\cdot x\leqslant w\}. \qquad (2\text{-}2)$$

---

① 以任意实数计量商品 l,已隐含地假定商品 l 是完全可分的,而这明显地不适用于以件计量的商品,如服装、电器等. 但在统计平均的意义下,以实数表示任何商品都是可以接受的.

$B_{p,w}$ 称为消费者的 Walras 预算集或竞争预算集，简称为预算集.

对于效用函数 $u(\cdot)$，随着讨论的展开，将附加一些强弱不等的条件. 现在只是指出：假定 $u(\cdot)$ 总是连续的且处处不取局部极大，这意味着 $\succcurlyeq$ 是连续的、局部非饱和的理性偏好(参见 1.1.2 小节).

作了上述准备之后，现在已可更确切地表达消费者的选择问题：对给定的$(p,w)\gg 0$，消费者选择 $x\in B_{p,w}$，以实现其效用最大化，即解效用最大化问题 (UMP)

$$\begin{cases}\max u(x) = v(p,w), \\ \text{s.t. } p\cdot x\leqslant w, \quad x\in \mathbf{R}_+^L.\end{cases} \tag{2-3}$$

问题(2-3)中的 $v(p,w)$ 表示最大效用值，即

$$v(p,w) = \max_{x\in B_{p,w}} u(x), \tag{2-4}$$

称它为间接效用函数，它表达了消费者的最优效用水平.

当 $(p,w)\gg 0$ 时 $B_{p,w}$ 是紧集，因而连续函数 $u(\cdot)$ 在 $B_{p,w}$ 上必取得最大值. 这就表明，问题(2-3) 必定有解. 以 $x(p,w)$ 记问题(2-3) 的解之全体，则它是(p,w) 的函数(可能是多值函数)，称为 Walras 需求函数或市场需求函数，简称为需求函数①. 于是问题(2-3) 确定出两个函数：$x(p,w)$ 与 $v(p,w)$，它们联系于以下恒等式

$$u(x(p,w)) = v(p,w). \tag{2-5}$$

这两个函数完全刻画了消费者的选择行为，它们构成消费理论的基本研究对象. 注意 $x(p,w)$ 与 $u(\cdot)$ 的选取无关，它仅仅决定于偏好 $\succcurlyeq$. 因此，通常说 $x(p,w)$ 是由偏好 $\succcurlyeq$ 产生的需求函数，或说 $x(p,w)$ 是依偏好 $\succcurlyeq$ 的最优选择. 事实上，可以定义完全不依赖于效用函数的需求函数，即

$$x(p,w) = \{x\in B_{p,w} : x\succcurlyeq y \quad (\forall\, y\in B_{p,w})\}. \tag{2-6}$$

① 在多值的情况下，通常称为需求对应.

另一方面，函数 $v(p,w)$ 显然与 $u(\cdot)$ 的选取有关，其函数值并无内在意义. 但这并不影响它作为一个分析工具的价值.

下面分别讨论函数 $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$ 的性质.

2.1.2 函数 $x(p,w)$ 的性质

函数 $x(p,w)$ 虽然一般是多值的，但仍然可以使用包含 $x(p,w)$ 的等式与不等式. 例如，式(2-5) 可理解为：对任给 $\bar{x} \in x(p,w)$ 有 $u(\bar{x}) = v(p,w)$；不等式 $p \cdot x(p,w) \leqslant w$ 表示对任给 $\bar{x} \in x(p,w)$ 有 $p \cdot \bar{x} \leqslant w$. 下面碰到类似情况时作同样理解.

函数 $x(p,w)(p \gg 0, w > 0)$ 有以下性质.

1. 齐次性[①] $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w) \quad (\forall\ \alpha > 0)$.

这由明显的等式 $B_{\alpha p,\alpha w} = B_{p,w}$(用式(2-2)) 直接看出. 直观上，齐次性意味着：若价格与收入成比例变化，则需求量保持不变.

2. Walras 定律 $p \cdot x(p,w) = w$.

证 设 $\bar{x} \in x(p,w)$，则 $p \cdot \bar{x} \leqslant w$. 若 $p \cdot \bar{x} < w$，则 $\bar{x}$ 必为 $u(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}_+^L$ 上的局部极大值点，这与对 $u(\cdot)$ 的假设矛盾. 因此 $p \cdot \bar{x} = w$. □

几何上，Walras 定律意味着 $x(p,w)$ 必位于 $B_{p,w}$ 的边界 $\{x \in \mathbf{R}_+^L : p \cdot x = w\}$ 上，后者是一以 p 为法向量的超平面，称为预算超平面；当 $L = 2$ 时称为预算线.

由 Walras 定律推出，若 $p \cdot x < w$，则必定 $u(x) < v(p,w)$.

3. 凸性与单值性 若 $\succcurlyeq$ 是凸性的，则对给定的 $(p,w) \gg 0$，$x(p,w)$ 是一凸集；若 $\succcurlyeq$ 是严格凸的，则 $x(p,w)$ 是 (p,w) 的单值函数.

证 取定 $(p,w) \gg 0$. 设 $x_0 \in x(p,w)$，则

---

① 若 $f(\cdot)$ 满足 $f(\alpha x) = \alpha^n f(x)(\forall\ \alpha > 0)$，则说 f 是 n 次正齐次的. 因本书仅用到正齐次性，故今后将正齐次函数简称为齐次函数，如 $x(p,w)$ 是 0 次齐次函数.

$$x(p,w)=\{x\in B_{p,w}: u(x)\geqslant u(x_0)\}$$
$$=\{x\in B_{p,w}: x\succcurlyeq x_0\}=B_{p,w}\cap U_{x_0}.$$

$B_{p,w}$ 显然是凸集. 若 $\succcurlyeq$ 是凸性的，则 U_{x_0} 是凸集(命题 1.3)，从而 $x(p,w)$ 是凸集. 若 $x_0,x_1\in x(p,w)$，$x_0\neq x_1$，则 $x\triangleq(x_0+x_1)/2\in B_{p,w}$，因而 $u(x)\leqslant u(x_0)=u(x_1)$. 这与式(1-8)比较看出，$u(\cdot)$ 必非强拟凹函数. 因此，当 $\succcurlyeq$ 严格凸时 $x(p,w)$ 只能含唯一点. □

4. 连续性　为描述可能多值的函数 $x(p,w)$ 的连续性，引进以下概念，它在后面还要多次用到.

定义 2.1　设 $D\subset\mathbf{R}^L$，$F: D\to\mathbf{R}^L$ 是一多值函数. 若当 $x^n\in D$，$x^n\to x\in D$，$y^n\in Fx^n$，$y^n\to y(n\to\infty)$ 时必 $y\in Fx$，则说 F 在 D 内上半连续.

定理 2.1　$x(p,w)$ 对 $(p,w)\gg 0$ 上半连续. 由此推出：若 $x(p,w)$ 是单值函数，则它在通常的意义下连续.

证　设 $(p^n,w^n)\to(p,w)\gg 0$，$x^n\in x(p^n,w^n)$，$x^n\to x(n\to\infty)$，今证 $x\in x(p,w)$. 首先，由 Walras 定律有 $p^n\cdot x^n=w^n$，可推出 $p\cdot x=w$，故 $x\in B_{p,w}$. 若 $z\in B_{p,w}$，则 $p\cdot z\leqslant w$，于是

$$w^n\geqslant\frac{w^n}{w}p\cdot z=\sum_l p_l^n\left(\frac{w^n p_l}{wp_l^n}z_l\right)=\sum_l p_l^n z_l^n=p^n\cdot z^n,$$

其中，$z_l^n=z_l w^n p_l/wp_l^n\to z_l(n\to\infty)$. 因此有 $u(z^n)\leqslant u(x^n)$；用 $u(\cdot)$ 的连续性得 $u(z)\leqslant u(x)$，这表明 $x\in x(p,w)$.

若 $x(p,w)$ 是单值的，$(p^n,w^n)\to(p,w)\gg 0$，$x^n=x(p^n,w^n)$，则 $\{x^n\}$ 必有界(何故?)，因而有收敛子列 $\{x^{n'}\}$. 由已证结论，有 $x^{n'}\to x(p,w)$. 将此结论用到 $\{x^n\}$ 的每一子列得 $x^n\to x(p,w)$. □

直观上，连续性意味着：在价格与收入的微小变动下，需求不可能剧烈变化.

5. 补偿需求定律　设 $x\in x(p,w)$，$x'\in x(p',w')$，$\Delta p=p'-p$，$\Delta x=x'-x$，则

$$p'\cdot x=w'\Rightarrow\Delta p\cdot\Delta x\leqslant 0,$$

且仅当 $x'\in x(p,w)$，$x\in x(p',w')$ 时 $\Delta p\cdot\Delta x=0$.

证 若 $\Delta p \cdot \Delta x \geqslant 0$,则用 Walras 定律与 $p' \cdot x = w'$ 得

$$0 \leqslant (p' - p) \cdot (x' - x) = w - p \cdot x',$$

可见 $p \cdot x' \leqslant w$,即 $x' \in B_{p,w}$,因而 $u(x') \leqslant u(x)$. 另一方面,由 $p' \cdot x = w'$ 有 $x \in B_{p',w'}$,因而 $u(x) \leqslant u(x')$,于是 $u(x) = u(x')$. 这得出 $x' \in x(p,w)$ 且 $x \in x(p',w')$. □

补偿需求定律的直观意义是:若当价格从 p 变到 p' 时如此调整 w,使 w' 能抵偿支付 $p' \cdot x$,则需求与价格朝相反的方向变化:$\Delta p \cdot \Delta x \leqslant 0$.

在本段中,函数 $x(p,w)$ 的一系列性质是在相对地较为宽泛的条件下推出的. 这些性质的表述与推证在它处将以某种形式重复出现,因此特别值得注意.

2.1.3 函数 $v(p,w)$ 的性质

$v(p,w)$ 无疑是比 $x(p,w)$ 更好把握的函数. 首先,$v(p,w)$ 不像 $x(p,w)$ 那样具有多值性;而且,$v(p,w)$ 是一个数量函数. 下面看到,$v(p,w)$ 具有一些令人满意的性质,其中有些是与 $x(p,w)$ 的性质相联系的.

1. 齐次性 $v(\alpha p, \alpha w) = v(p,w) \quad (\forall\ \alpha > 0)$.

这由 $x(p,w)$ 的齐次性与式(2-5) 推出.

2. 单调性 $v(p,w)$ 对 p 单调减,对 w 严格单调增.

证 固定 $w > 0$. 若 $0 \ll p \leqslant p'$,则 $B_{p,w} \supset B_{p',w}$(用式(2-2)),于是由式(2-4) 推出 $v(p,w) \geqslant v(p',w)$. 这表明 $v(p,w)$ 对 p 单调减.

其次,固定 $p \gg 0$,设 $0 < w < w'$,则由 $p \cdot x(p,w) = w < w'$ 推出

$$v(p,w) = u(x(p,w)) < u(p,w'),$$

可见 $v(p,w)$ 对 w 严格单调增. □

3. 凸凹性 $v(p,w)$ 是拟凸函数(参见 1.2.2 小节),即

$$v(\alpha p + \alpha' \bar{p}, \alpha w + \alpha' \bar{w}) \leqslant \max\{v(p,w), v(\bar{p},\bar{w})\},$$

其中，$\alpha \in [0,1]$，$p,\bar{p} \gg 0$，$w,\bar{w}>0$（注意所述条件相当于 $-v(p,w)$ 是拟凹的）. 若 $u(\cdot)$ 是凹函数，则 $v(p,w)$ 对 w 是凹函数.

证 令 $(p_0,w_0)=\alpha(p,w)+\alpha'(\bar{p},\bar{w})$. 直接看出 $B_{p_0,w_0} \subset B_{p,w} \cup B_{\bar{p},\bar{w}}$，这结合式(2-4)得出

$$
\begin{aligned}
v(p_0,w_0) &\leqslant \max\{u(x): x \in B_{p,w} \cup B_{\bar{p},\bar{w}}\} \\
&\leqslant \max\{\max_{x\in B_{p,w}} u(x), \max_{x \in B_{\bar{p},\bar{w}}} u(x)\} \\
&= \max\{v(p,w), v(\bar{p},\bar{w})\},
\end{aligned}
$$

这表明 $v(\cdot,\cdot)$ 是拟凸函数.

其次设 $u(\cdot)$ 是凹函数，固定 $p \gg 0$. 设 $\alpha \in [0,1]$，$w,\bar{w}>0$，则

$$
\begin{aligned}
v(p,\alpha w+\alpha'\bar{w}) &= \max\{u(x): p\cdot x \leqslant \alpha w+\alpha'\bar{w}\} \\
&\geqslant \max\{u(\alpha y+\alpha' z): p\cdot y \leqslant w, p\cdot z \leqslant \bar{w}\} \\
&\geqslant \max\{\alpha u(y)+\alpha' u(z): p\cdot y \leqslant w, p\cdot z \leqslant \bar{w}\} \\
&= \max\{\alpha u(y): p\cdot y \leqslant w\} \\
&\quad + \max\{\alpha' u(z): p\cdot z \leqslant \bar{w}\} \\
&= \alpha v(p,w)+\alpha' v(p,\bar{w}),
\end{aligned}
$$

这表明 $v(p,w)$ 对 w 为凹函数. □

4. 连续性 $v(p,w)$ 是 $\mathbf{R}_{++}^{L+1}$ 内的连续函数.

这是定理 2.1 的推论.

2.1.4 微分条件

现在设 $u(\cdot) \in C^1$（C^1 记连续可微函数类），因而可将关于不等式约束最优化问题的 Kuhn-Tucker 条件（简称 K-T 条件）应用于 UMP 式(2-3)，得出 $\bar{x} \in x(p,w)$ 的一阶必要条件与充分条件. 将所得条件用于具体的效用函数，有可能得出 $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$ 的表达式.

定理 2.2 设 $u(\cdot) \in C^1$，$(p,w) \gg 0$.

1° 必要条件. 若 $\bar{x} \in x(p,w)$，则存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+$，使得

$$\nabla u(\bar{x}) \leqslant \lambda p, \quad [\nabla u(\bar{x}) - \lambda p] \cdot \bar{x} = 0; \tag{2-7}$$

当 $\bar{x} \gg 0$ 时有 $\nabla u(\bar{x}) = \lambda p$.

2° 充分条件. 若 $u(\cdot)$ 是拟凹函数, $\bar{x} \in \mathbf{R}^L_+$ 满足

$$p \cdot \bar{x} = w, \quad \nabla u(\bar{x}) = \lambda p \gg 0, \tag{2-8}$$

则 $\bar{x} \in x(p,w)$.

证 1° 作 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = u(x) - \lambda p \cdot x + \mu \cdot x.$$

若 $\bar{x}$ 是 UMP 式(2-3) 的解, 则由 K-T 条件有 $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\mu \in \mathbf{R}^L_+$, 使得

$$\begin{cases} \nabla \mathscr{L}(\bar{x}) = \nabla u(\bar{x}) - \lambda p + \mu = 0; \\ \lambda(p \cdot \bar{x} - w) = \mu \cdot \bar{x} = 0. \end{cases} \tag{2-9}$$

由式(2-9)直接推出式(2-7). 若 $\bar{x} \gg 0$, 则从 $\mu \cdot \bar{x} = 0$ 与 $\mu \geqslant 0$ 推出 $\mu = 0$, 因而 $\nabla u(\bar{x}) = \lambda p$.

2° 若 $\bar{x} \notin x(p,w)$, 则取 $x^* \in x(p,w)$ 得 $u(\bar{x}) < u(x^*)$. 取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 $u(\bar{x}) < u(\alpha' x^*)$, 则 $t \downarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u(t'\bar{x} + t\alpha' x^*) - u(\bar{x}) && \text{(用拟凹性)} \\ &= u(\bar{x} + t(\alpha' x^* - \bar{x})) - u(\bar{x}) \\ &= t\nabla u(\bar{x}) \cdot (\alpha' x^* - \bar{x}) + o(t) \\ &= t\lambda p \cdot (\alpha' x^* - \bar{x}) + o(t) && \text{(用式(2-8))} \\ &= -t\lambda\alpha w + o(t), && \text{(用式(2-8))} \end{aligned}$$

这推出 $\lambda\alpha w \leqslant 0$, 得出矛盾. 因此 $\bar{x} \in x(p,w)$. □

由定理 2.2 推出, 若 $\succcurlyeq$ 是凸性的, $\bar{x} \gg 0$, $\nabla u(\bar{x}) \gg 0$, $p \cdot \bar{x} = w$, 则 $\bar{x} \in x(p,w)$ 的充要条件是: 存在 $\lambda > 0$, 使 $\nabla u(\bar{x}) = \lambda p$. 几何上, 这意味着无差别曲面 $u(x) = u(\bar{x})$ 与预算超平面在点 $\bar{x}$ 相切(如图 2-1). 条件 $\nabla u(\bar{x}) = \lambda p$ 可等价地表成

图 2-1

$$\frac{\partial u(\bar{x})/\partial x_l}{\partial u(\bar{x})/\partial x_k} = \frac{p_l}{p_k} \tag{2-10}$$

$(1 \leqslant l, k \leqslant L)$. 式(2-10)左端称为商品 l 与 k 之间的边际替代率，记作 MRS_{lk}.

定理 2.2 中的 λ 称为 Lagrange 乘子，在一定附加条件下，可求出其表达式.

命题 2.1 设 $u(\cdot) \in C^1$, $x(p,w)$ 是单值可微函数且 $x(p,w) \gg 0$，则

$$\nabla u(x(p,w)) = [\partial v(p,w)/\partial w]p, \tag{2-11}$$

即

$$\lambda = \partial v(p,w)/\partial w.$$

证 固定 $(p,w) \gg 0$，令 $\bar{x} = x(p,w)$. 由 $p \cdot x(p,w) = w$ 得

$$x(p,w) + \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} p = 0, \quad p \cdot \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} = 1. \tag{2-12}$$

由定理 2.2 有 $\nabla u(\bar{x}) = \lambda p, \lambda \in \mathbf{R}_+$，于是

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda p \cdot \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} \qquad \text{（用式(2-12)）} \\ &= \nabla u(\bar{x}) \cdot \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} \\ &= \frac{\partial}{\partial w} u(x(p,w)) = \frac{\partial v(p,w)}{\partial w}. \end{aligned}$$

□

以一个典型例子来解释以上结论.

例 2.1 设 $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$ 是 Cobb-Douglas 效用函数（参看例 1.2），$\alpha + \beta \leqslant 1$. 因 $u(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}_+^2$ 上是凹函数，故定理 2.2 中的必要条件、充分条件皆可用. 给定 $(p_1, p_2, w) \gg 0$，由式(2-10)有

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}.$$

这与 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ 一起惟一地解出

$$x(p,w) = (x_1, x_2) = \left(\frac{\alpha w}{p_1(\alpha+\beta)}, \frac{\beta w}{p_2(\alpha+\beta)} \right); \tag{2-13}$$

$$v(p,w) = u(x(p,w)) = \left(\frac{w}{\alpha+\beta} \right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_2} \right)^\beta. \tag{2-14}$$

利用式(2-13)、(2-14)可直接验证 $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$ 的以下性质：

(1) $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$ 都是 0 次齐次函数；

(2) $v(p,w)$ 对 p 单调减，对 w 严格单调增；

(3) $v(p,w)$ 对 w 是凹函数；

(4) 满足恒等式(2-5)、(2-11).

2.2 支出最小化

如同 2.1 节一样，仍设 $\succeq$ 是 $\mathbf{R}_+^L$ 上连续的、局部非饱和的理性偏好，$u(\cdot)$ 是其连续效用表示. 不过，现在让消费者改换一下他的消费行为的目标：不是在固定支出水平的约束下最大化其效用，而是在固定效用水平的约束下最小化其支出 —— 简单地说，就是交换目标函数与约束函数的位置. 这样一来，所得的结果就与 2.1 节中的结果处于一种对偶关系. 我们将看到，这种对偶性显著地丰富了需求理论.

2.2.1 支出最小化问题

给定价格向量 $p \gg 0$ 与效用水平 $u > u(0)$，消费者选择 $x \in \mathbf{R}_+^L$，使得 $u(x) \geqslant u$ 且实现支出最小化，即解支出最小化问题(EMP)

$$\begin{cases}\min\ p \cdot x = e(p,u); \\ \text{s.t. } u(x) \geqslant u, \quad x \in \mathbf{R}_+^L.\end{cases} \tag{2-15}$$

式(2-15)正是与上节式(2-3)对偶的问题. 下面的叙述都在与上节内容成对偶的形式下进行. 例如，与最大效用 $v(p,w)$ 相对应，$e(p,u)$ 表最小支出，即

$$e(p,u) = \min\{p \cdot x : u(x) \geqslant u, x \in \mathbf{R}_+^L\}, \tag{2-16}$$

它称为支出函数. 以 $h(p,u)$ 记 EMP(2-15) 的解之全体，则它是 (p,u) 的函数(可能是多值函数)，称为 Hicks 需求函数或补偿需求

函数，它正是与 Walras 需求函数 $x(p,w)$ 相对应的东西. 与式 (2-5) 对应的恒等式是

$$p \cdot h(p,u) = e(p,u). \tag{2-17}$$

按照上节的思路，下一步应当是导出函数 $h(p,u)$ 与 $e(p,u)$ 的各种性质. 不过，在这样做之前，最好是先建立 $h(p,u)$，$e(p,u)$ 与 $x(p,w)$，$v(p,w)$ 之间的联系；借助于这些联系，或许可将 $x(p,w)$，$v(p,w)$ 的某些性质直接转移到函数 $h(p,u)$，$e(p,u)$.

命题 2.2 对任给 $(p,w) \gg 0$ 与 $u > u(0)$，成立恒等式：

$$x(p,w) = h(p,v(p,w)); \tag{2-18}$$

$$h(p,u) = x(p,e(p,u)); \tag{2-19}$$

$$v(p,e(p,u)) = u; \tag{2-20}$$

$$e(p,v(p,w)) = w. \tag{2-21}$$

证 只证式(2-18)，其余是类似的. 首先确立以下事实：

$$u(h(p,u)) = u. \tag{2-22}$$

$\forall\, \bar{x} \in h(p,u)$，显然有 $u(\bar{x}) \geqslant u$. 若 $u(\bar{x}) > u$，则可取充分接近 $\bar{x}$ 的 y，使 $0 \leqslant y < \bar{x}$（因 $u > u(0)$，故必 $\bar{x} > 0$，因而如上的 y 存在），于是 $u(y) > u$，而 $p \cdot y < p \cdot \bar{x}$，这与 $\bar{x}$ 是 EMP(2-15) 的解相矛盾. 因此 $u(\bar{x}) = u$，这表明式(2-22) 成立.

任取 $\bar{x} \in x(p,w)$，令 $\bar{u} = u(\bar{x}) = v(p,w)$. 若 $x \in \mathbf{R}_+^L$，$u(x) \geqslant \bar{u}$，则必 $p \cdot x \geqslant p \cdot \bar{x}$. 否则 $p \cdot x < p \cdot \bar{x} = w$，由 Walras 定律推出 $u(x) < u(\bar{x}) = \bar{u}$，得出矛盾. 这就证得 $\bar{x} \in h(p,\bar{u}) = h(p,v(p,w))$.

反之，若 $\bar{x} \in h(p,\bar{u})$，$\bar{u} = v(p,w)$，则由式(2-22) 有 $u(\bar{x}) = \bar{u} = v(p,w)$. 这就推出 $\bar{x} \in x(p,w)$，否则必 $p \cdot \bar{x} > w = p \cdot x_0$，此处 $x_0 \in x(p,w)$ 是任取的. 而 $u(x_0) = v(p,w) = \bar{u}$，这与 $\bar{x} \in h(p,\bar{u})$ 相矛盾. □

式(2-18)、(2-19) 表明，两个需求函数 $x(p,w)$ 与 $h(p,u)$ 相互惟一确定；而式(2-20)、(2-21) 则表明，对固定的 $p \gg 0$，函数 $v(p,\cdot)$ 与 $e(p,\cdot)$ 互为反函数，因而亦相互惟一确定. 因此，通过

恒等式(2-18)～(2-21)，可实现函数 $x(p,w)$ 与 $h(p,u)$ 之间及 $v(p,w)$ 与 $e(p,u)$ 之间的相互转化. 下面将看到，这一事实极有利用价值.

2.2.2 函数 $h(p,u)$ 的性质

以下总假定 $p \gg 0, u > u(0)$.

1. 齐次性 $h(\alpha p,u) = h(p,u) \quad (\forall\ \alpha > 0)$.

证 问题(2-15)的目标函数 $p \cdot x$ 可换成 $\alpha p \cdot x(\alpha > 0)$ 而不影响其解集. □

以上结论也可以利用恒等式(2-18)、(2-19)从 $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$ 的齐次性导出，读者不妨一试.

2. 边值性 $h(p,u)$ 必位于集$\{x \in \mathbf{R}_+^L : u(x) \geqslant u\}$的边界上.

这就是恒等式(2-22). 它的对偶性质正是：$x(p,w)$ 位于集 $B_{p,w}$ 的边界上. 注意，式(2-22)可利用式(2-19)、(2-20)从式(2-5)推出，即

$$
\begin{aligned}
u(h(p,u)) &= u(x(p,e(p,u)) \qquad &(\text{用式(2-19)})\\
&= v(p,e(p,u)) &(\text{用式(2-5)})\\
&= u. &(\text{用式(2-20)})
\end{aligned}
$$

3. 凸性与单值性 若 $\succsim$ 是凸性的，则对给定的 $p \gg 0, u > u(0)$，$h(p,u)$ 是一凸集；若 $\succsim$ 是严格凸的，则 $h(p,u)$ 是 (p,u) 的单值函数.

这由式(2-19)及函数 $x(p,w)$ 的相应性质(参见 2.1.2 小节)推出.

4. 连续性 $h(p,u)$ 对 $(p,u) \gg (0,u(0))$ 上半连续. 由此推出：若 $h(p,u)$ 是单值函数，则它在通常的意义下连续.

若假定 $e(p,u)$ 的连续性，则以上结论可利用式(2-19)从 $x(p,w)$ 的相应性质推出. $e(p,u)$ 的连续性在下段确立.

5. 需求定律 设 $p, p' \gg 0, u > u(0), x \in h(p,u), x' \in$

$h(p',u)$，$\Delta p = p' - p$，$\Delta x = x' - x$，则

$$\Delta p \cdot \Delta x \leqslant 0, \tag{2-23}$$

且仅当 $x \in h(p',u)$，$x' \in h(p,u)$ 时等式成立.

证 由 $u(x) = u(x') = u$，有

$$\begin{aligned}\Delta p \cdot \Delta x &= (p' - p) \cdot (x' - x) \\ &= (p' \cdot x' - p' \cdot x) + (p \cdot x - p \cdot x') \leqslant 0,\end{aligned}$$

等式成立仅当 $p' \cdot x' = p' \cdot x$，$p \cdot x = p \cdot x'$，即 $x \in h(p',u)$，$x' \in h(p,u)$. □

2.2.3 函数 $e(p,u)$ 的性质

这一段可与 2.1.3 小节对照起来阅读. $v(p,w)$ 及 $h(p,u)$ 的已知性质，都可用来推导 $e(p,u)$ 的相应性质.

1. 齐次性 $e(\alpha p,u) = \alpha e(p,u)$ $(\forall\ \alpha > 0)$，即支出与价格成比例.

证 由 $h(\cdot,u)$ 的齐次性推出：

$$\begin{aligned}e(\alpha p,u) &= \alpha p \cdot h(\alpha p,u) \qquad (\text{用式(2-17)}) \\ &= \alpha p \cdot h(p,u) = \alpha e(p,u).\end{aligned}$$ □

2. 单调性 $e(p,u)$ 对 p 单调增，对 u 严格单调增.

证 直接由式(2-16)看出 $e(p,u)$ 对 p 单调增. 因 $v(p,w)$ 对 w 严格单调增，而 $e(p,\cdot)$ 与 $v(p,\cdot)$ 互为反函数，故 $e(p,u)$ 亦必对 u 严格单调增. □

3. 凸凹性 $e(p,u)$ 对 p 为凹函数；若 $u(\cdot)$ 是凹函数，则 $e(p,u)$ 对 u 是凸函数.

证 固定 $u > u(0)$，设 $p, \bar{p} \gg 0$，$\alpha \in [0,1]$，则由式(2-16)有

$$\begin{aligned}e(\alpha p + \alpha' \bar{p},u) &= \min_{u(x)\geqslant u} (\alpha p + \alpha' \bar{p}) \cdot x \\ &\geqslant \min_{u(x)\geqslant u} \alpha p \cdot x + \min_{u(x)\geqslant u} \alpha' \bar{p} \cdot x \\ &= \alpha e(p,u) + \alpha' e(\bar{p},u),\end{aligned}$$

这表明 $e(p,u)$ 对 p 为凹函数.

其次设 $u(\cdot)$ 是凹函数，固定 $p \gg 0$，则 $v(p,\cdot)$ 为凹函数且为严格增函数，于是其反函数 $e(p,\cdot)$ 是凸函数. □

4. 连续性 $e(p,u)$ 是 (p,u) 的连续函数.

证 由式(2-20)，$w = e(p,u)$ 满足方程

$$F(p,u,w) \triangleq v(p,w) - u = 0.$$

因 F 是 (p,u,w) 的连续函数且对 w 严格单调增，故由隐函数定理推出 $w = e(p,u)$ 是 (p,u) 的连续函数. □

注 如同 $x(p,w)$ 的上半连续性推出 $v(p,w)$ 的连续性一样，$h(p,u)$ 的上半连续性也推出 $e(p,u)$ 的连续性. 但这不是一个合适的证明，因在推出 $h(p,u)$ 的上半连续性时用到 $e(p,u)$ 的连续性.

5. 可微性 设 $\bar{p} \gg 0, \bar{u} > u(0)$，则 $e(p,\bar{u})$ 对 p 在点 $\bar{p}$ 可微的充要条件是 $h(\bar{p},\bar{u})$ 仅含一点，此时有

$$\frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p} = h(\bar{p},\bar{u}).$$

这是以下一般定理的推论.

定理 2.3(对偶定理) 设 $K \subset \mathbf{R}^L$ 是一非空闭集，

$$\mu_K(p) = \inf_{x \in K} p \cdot x$$

是 K 的支承函数；$\bar{p} \in \mathbf{R}^L$. 则 $\mu_K(p)$ 在点 $\bar{p}$ 可微的充要条件是存在唯一 $\bar{x} \in K$，使得 $\mu_K(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{x}$；此时有 $\partial \mu_K(\bar{p})/\partial p = \bar{x}$.

简单地说，$e(\cdot,u)$ 的可微性等价于 $h(\cdot,u)$ 的单值性.

2.2.4 微分条件

与定理 2.2 相对应，有以下结论.

定理 2.4 设 $u(\cdot) \in C^1, p \gg 0, u > u(0)$.

1° 必要条件. 若 $\bar{x} \in h(p,u)$，则存在 $\lambda > 0$，使得

$$\lambda \nabla u(\bar{x}) \leqslant p, \quad [\lambda \nabla u(\bar{x}) - p] \cdot \bar{x} = 0, \qquad (2\text{-}24)$$

当 $\bar{x} \gg 0$ 时 $\lambda \nabla u(\bar{x}) = p$.

2° 若 $u(\cdot)$ 是拟凹函数，$\bar{x} \in \mathbf{R}_+^L$ 满足

$$u(\bar{x}) = u, \quad p = \lambda \nabla u(\bar{x}), \tag{2-25}$$

则 $\bar{x} \in h(p,u)$.

证 1° 如同定理 2.2 之证，用 K-T 条件得出存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+$，使式(2-24)成立. 必定 $\lambda > 0$，否则 $\lambda = 0$，于是由式(2-24)得 $p \cdot \bar{x} = 0$，从而 $\bar{x} = 0$，但这与 $u(\bar{x}) = u > u(0)$ 相矛盾.

2° 必定 $\bar{x} > 0$，因而 $w \triangleq p \cdot \bar{x} > 0$，于是由定理 2.2 之 2° 有

$$\begin{aligned} \bar{x} \in x(p,w) &= h(p,v(p,w)) \quad (\text{用式(2-18)}) \\ &= h(p,u(\bar{x})) = h(p,u). \end{aligned}$$

□

条件 $\lambda \nabla u(\bar{x}) = p$ 显然同样等价于式(2-24). 对于 Cobb-Douglas 生产函数 $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$（参看例 2.1），联立式(2-10)与 $u(x) = u$ 惟一地解出

$$h(p,u) = \left(\frac{k\alpha}{p_1}, \frac{k\beta}{p_2}\right), \quad k = \left[u\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}; \tag{2-26}$$

$$e(p,u) = p \cdot h(p,u) = k(\alpha + \beta). \tag{2-27}$$

由式(2-26)、(2-27)看出，$h(p,u)$ 与 $e(p,u)$ 对 p 分别是 0 次齐次与 1 次齐次函数；$e(p,u)$ 对 p 单调增且为凹函数，对 u 严格单调增且为凸函数($\alpha + \beta \leqslant 1$). 这些都应证了 2.2.2 与 2.2.3 小节中的结论. 结合式(2-13)、(2-14)，也可验证式(2-19)与式(2-20)：

$$h(p,u) = x(p,e(p,u)), \quad v(p,e(p,u)) = u.$$

例 2.2 考虑两类重要的效用函数：

(1) **齐次效用函数** $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ ($\forall\ \alpha > 0$). 由 Euler 定理有

$$\nabla u(x) \cdot x = u(x).$$

以 $x = x(p,w)$ 代入并用式(2-5)、(2-11)，得

$$v(p,w) = w\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}.$$

两边对 w 求导得 $\partial^2 v/\partial w^2 = 0$，因而 $\partial v/\partial w$ 与 w 无关，记为 $\tilde{v}(p)$，于是

$$v(p,w) = w\tilde{v}(p); \tag{2-28}$$

然后结合式(2-20)、(2-28)解出

$$e(p,u) = u/\tilde{v}(p) = u\tilde{e}(p). \tag{2-29}$$

下面将指明$h(p,u)=\partial e(p,u)/\partial p$（见式(2-38)），因此由式(2-29)得

$$h(p,u) = u\tilde{h}(p); \tag{2-30}$$

然后结合式(2-18)、(2-28)、(2-30)得

$$x(p,w) = w\tilde{x}(p). \tag{2-31}$$

注意当$\alpha+\beta=1$时，Cobb-Douglas 效用函数是1次齐次的. 在式(2-26)、(2-27)及式(2-13)、(2-14)中令$\alpha+\beta=1$，正好能验证式(2-28)～(2-31).

（2）拟线性效用函数

$$u(x) = x_l + \varphi(x_{-l}), \tag{2-32}$$

其中，$x_{-l}=(x_1,\cdots,x_{l-1},x_{l+1},\cdots,x_L)$. 将$\partial u/\partial x_l=1$与式(2-11)比较得$\partial v/\partial w=1/p_l$，这就得出

$$v(p,w) = \frac{w}{p_l} + \bar{v}(p). \tag{2-33}$$

然后结合式(2-20)、(2-33)解出

$$e(p,u) = p_l u + \bar{e}(p). \tag{2-34}$$

由式(2-33)、(2-34)及下面的式(2-39)、(2-38)可知，当$k\neq l$时$x_k(p,w)$与$h_k(p,u)$都只是p的函数.

2.2.5 几个恒等式

我们已得到联系函数$u(x)$，$x(p,w)$，$v(p,w)$，$h(p,u)$，$e(p,u)$的一系列恒等式，即式(2-5)、(2-11)、(2-12)及式(2-17)～(2-22). 现在再补充几个涉及$x(p,w)$，$v(p,w)$，$h(p,u)$，$e(p,u)$的导数的恒等式，这些恒等式揭示了需求函数、效用函数与支出函数之间深刻的内在联系. 以下设$u(x)$，$x(p,w)$与$h(p,u)$皆为C^1函数，从而$v(p,w)$与$e(p,u)$亦为C^1函数.

首先，由$x(p,w)$，$v(p,w)$，$h(p,u)$及$e(p,u)$的齐次性，用 Euler 定理得出

$$\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}p + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}w = 0; \tag{2-35}$$

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}p + \frac{\partial v(p,w)}{\partial w}w = 0; \tag{2-36}$$

$$\frac{\partial h(p,u)}{\partial p}p = 0, \quad \frac{\partial e(p,u)}{\partial p}p = e(p,u). \tag{2-37}$$

式(2-17)两边对 p 求导得

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p} = h(p,u) + \frac{\partial h(p,u)}{\partial p}p$$

$$= h(p,u). \quad (\text{用式(2-37)}) \tag{2-38}$$

式(2-21)两边对 p 求导得

$$0 = h(p,v(p,w)) + \left.\frac{\partial e}{\partial u}\right|_{u=v(p,w)} \frac{\partial v(p,w)}{\partial p} \quad (\text{用式(2-38)})$$

$$= x(p,w) + \left[\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}\right]^{-1} \frac{\partial v(p,w)}{\partial p},$$

其中,用到 $v(p,\cdot)$ 与 $e(p,\cdot)$ 互为反函数. 因此得所谓 Roy 恒等式

$$x(p,w) = -\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}\bigg/\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}. \tag{2-39}$$

定义所谓 Slutsky 矩阵或替代矩阵为

$$\boldsymbol{S}(p,w) = \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}. \tag{2-40}$$

因 $\frac{\partial h(p,u)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}x(p,e(p,u))$ (用式(2-19))

$$= \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\left[\frac{\partial e(p,u)}{\partial p}\right]^{\mathrm{T}} \quad (w = e(p,u))$$

$$= \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}, \quad (\text{用式(2-38)、(2-18)})$$

故得

$$\boldsymbol{S}(p,w) = \frac{\partial h(p,u)}{\partial p} = \nabla_p^2 e(p,u), \quad u = v(p,w). \tag{2-41}$$

由式(2-41)得到一个引人注目的结论: $\boldsymbol{S}(p,w)$ 是对称矩阵,且因 $e(p,u)$ 对 p 是凹函数, $\boldsymbol{S}(p,w)$ 必是负半定的. 由此推出

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w)$$

$$= \frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_l} + \frac{\partial x_k(p,w)}{\partial w} x_l(p,w);$$

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} \quad (1 \leqslant k,l \leqslant L);$$

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_l(p,w) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant l \leqslant L). \tag{2-42}$$

这些都是很难仅凭直观的经济考察能得出的结论. 正如 Samuelson 所言,恒等式(2-41)(通常称为 Slutsky 方程)是惟有运用数学工具才能得出的经济学结论的典型例子.

结合式(2-41)与式(2-37)进而得出

$$\boldsymbol{S}(p,w)\boldsymbol{p} = 0, \quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(p,w) = 0. \tag{2-43}$$

式(2-43)表明, $\boldsymbol{S}(p,w)$ 必非可逆矩阵.

为引用方便,将本节与上节所得的主要恒等式综合如下.

$$u(x(p,w)) = v(p,w), \quad u(h(p,u)) = u.$$

$$p \cdot x(p,w) = w, \quad p \cdot h(p,u) = e(p,u).$$

$$x(p,w) = h(p,v(p,w));$$

$$h(p,u) = x(p,e(p,u)).$$

$$v(p,e(p,u)) = u, \quad e(p,v(p,w)) = w.$$

$$h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p};$$

$$x(p,w) = -\frac{\partial v(p,w)}{\partial p} \Big/ \frac{\partial v(p,w)}{\partial w}.$$

$$\boldsymbol{S}(p,w) = \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} \boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{\partial h(p,u)}{\partial p} = \nabla_p^2 e(p,u), \quad u = v(p,w).$$

$$\boldsymbol{S}(p,w)\boldsymbol{p} = 0, \quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(p,w) = 0.$$

2.2.6 比较静态分析

若一个经济量(例如消费需求)依赖于某些经济参数(例如 p, w),则考察当参数变化时该经济量如何改变是一重要课题,它就是所谓比较静态分析.变量对参数的依赖性自然通过导数来刻画.因此,从数学上说,比较静态分析通常是微分学的例行应用.不过,关于需求函数导数的一些性质源于对效用理论的深刻分析,因此下面的一些结果并不完全是平凡的.

以下假定 $x(p,w)$ 是单值可微函数,分别考虑它对 p,w 的依赖特性.

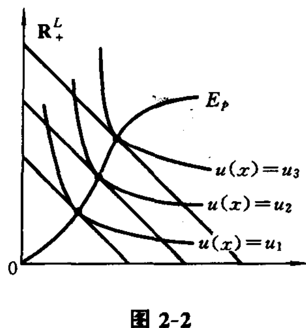


图 2-2

首先固定 $p\gg 0$,$x(p,w)$ 作为 w 的函数称为消费者的 Engel 函数.当 w 在区间$(0,\infty)$内变动时,点 $x(p,w)$ 在消费集 $\mathbf{R}$ 内描出一条轨道 E_p,称为财富扩展线或收入-消费线,导数 $\partial x(p,w)/\partial w$ 为其切向量.由2.1.4小节,E_p 是超曲面 $u(x)=\text{const}$ 与预算超平面 $p\cdot x=w$ 的相切点的连线(如图 2-1 与图 2-2).导数 $\partial x_l(p,w)/\partial w$ 称为商品 $l(1\leqslant l\leqslant L)$ 的财富效应(或收入效应).依 $\partial x_l(p,w)/\partial w>0$ 与 $\partial x_l(p,w)/\partial w<0$,分别称 l 为正常品与次品.若 $\partial x(p,w)/\partial w\gg 0$,则商品 $1,2,\cdots,L$ 均为正常品,此时说需求是正常的.一般情况下,可以认为需求是正常的,因而 E_p 是一条从原点出发向右上方伸展的曲线.应当注意,此处对正常品与次品的区分,并非依据商品的自然属性,它既与 p,w 有关,也与消费者有关.例如,自行车对于普通消费者是正常品,对于大亨则只能算次品.

其次考虑需求对价格的依赖性,这是比较静态分析的中心问题.令 $p=(p_l,p_{-l})$,固定$(p_{-l},w)\gg 0$.当 p_l 在$(0,\infty)$内变动时,

$x(p,w)$ 在 $\mathbf{R}_+^L$ 内描出一条曲线，称为价格-消费线，它以 $\partial x(p,w)/\partial p_l$ 为其切向量. 导数 $\partial x_k(p,w)/\partial p_l$ 称为 p_l 对商品 $k(1 \leqslant l,k \leqslant L)$ 的价格效应. 由式(2-42)有

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} \leqslant -\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_l(p,w). \tag{2-44}$$

若 l 是正常品，即 $\partial x_l(p,w)/\partial w > 0$，则 $\partial x_l(p,w)/\partial p_l < 0$. 由此可见，在一般情况下对商品 l 的需求与价格 p_l 负相关. 在几何上，这意味着需求曲线 $x_l = x_l(p_l, p_{-l}, w)$ 是一条从左上到右下倾斜的曲线(如图 2-3). 若 l 是次品，即 $\partial x_l(p,w)/\partial w < 0$，则不能从式(2-44)判定 $\partial x_l(p,w)/\partial p_l$ 的符号. 不过，当 $\partial x_l(p,w)/\partial p_l > 0$ 时，由式(2-44)推出 $\partial x_l(p,w)/\partial w < 0$，即 l 肯定为次品. 这种情况下的 l 称为 Giffen 商品[①]. 对于这种商品，价格上升导致需求上升，似乎有悖常理. 直观解释是，p_l 上升使得消费者购买力下降，因而增加了选购次品的倾向.

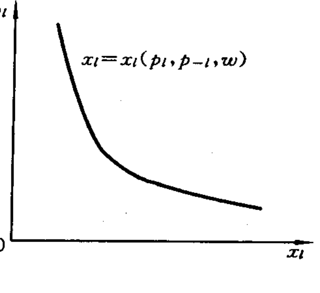


图 2-3

以上分析仅仅是定性的，并未涉及需求依赖于参数的敏感程度. 定量的刻画有赖于弹性概念. 一般地，对任给可微函数 $y = y(x)$，y 对 x 的弹性 E_{yx} 定义为

$$E_{yx} = \frac{\mathrm{d}y}{y}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{xy'(x)}{y}. \tag{2-45}$$

直观上，E_{yx} 是 y 的相对增长与 x 的相对增长之比. 例如，若 $E_{yx} = 2$，则当 x 增长 1% 时，y 增长约为 2%. 一般地，$|E_{yx}|$ 越大，y 对 x 的变动就越敏感.

---

① R. Giffen(1837—1910)，英国统计学家，他发现爱尔兰农民对土豆的需求随其价格上升而有所增加.

现在设 E_{lk} 是 $x_l(p,w)$ 对价格 p_k 的弹性，E_{lw} 的意义自明. 由式(2-35)、(2-45) 及式(2-12)，有

$$E_{lw} + \sum_k E_{lk} = 0;$$

$$b_l + \sum_k b_k E_{kl} = 0;$$

$$\sum_k b_k E_{kw} = 1, \tag{2-46}$$

其中，$b_l = w^{-1} p_l x_l(p,w)(1 \leqslant l \leqslant L)$. 依据 $E_{lw} < 1$ 与 $E_{lw} > 1$，分别称商品 l 为必需品与奢侈品. 直观上，必需品就是其需求量对收入变化不敏感的商品，如食品就是典型例子. 因显然 $\sum b_l = 1$，故式(2-46) 表明商品 $1,2,\cdots,L$ 中某些为必需品，某些为奢侈品，平均地说，则介于必需品与奢侈品之间.

2.3 福利分析

至此为止，我们一直将消费选择当做如同物理现象一样的自然过程来考察，只是分析其因果关系，回答“是什么”与“会怎样”的问题，而不涉及道义上的价值判断. 在经济学上，这属于实证分析的范畴之内. 与此不同，另一种观点则偏重于经济行为的福利后果，对其作出价值判断，回答“何者较好”与“应当如何”的问题. 这就是经济学中的规范观点. 实证与规范之分，是一种传统的说法. 现代经济学并不认为两者之间有什么绝对的界线，从方法论的角度来看尤其如此. 消费者的福利无疑是经济学所关注的首要问题之一. 分析价格变动所带来的福利影响，传统上称为福利分析，它似乎是一个规范分析的问题. 但在数理分析的框架内，下面所用的方法与本书前面所用的方法并无实质差别.

如同前两节一样，设 $\succsim$ 是给定的局部非饱和连续理性偏好，$u(\cdot)$ 是其连续效用表示. 函数 $x(p,w)$, $v(p,w)$, $h(p,u)$, $e(p,u)$ 均如前两节所述，用到它们的导数时假定其存在且连续.

2.3.1 福利增进及其货币度量

固定消费者的财富水平 $w > 0$. 假定商品价格从某一初始值 p^0 变动到 p^1,问题是应如何测定消费者福利的相应变化?

间接效用函数 $v(p,w)$ 似乎量度了消费者的福利水平,因而

$$\Delta v = v(p^1,w) - v(p^0,w)$$

似乎量度了价格变动引起的福利变化. 然而,$v(p,w)$ 无法实际测定,且它依赖于效用函数 $u(\cdot)$ 的选择,其数值与单位均无内在意义. 因此,改用函数

$$W(p) = e(\bar{p},v(p,w)) \tag{2-47}$$

来量度消费者的福利水平,其中 $\bar{p} \gg 0$ 是适当取定的. $W(p)$ 表示在市场价格 $\bar{p}$ 下,消费者为实现效用 $u = v(p,w)$ 所必需的支出,这一支出的上升(下降)意味着福利增进(损失). $W(p)$ 以货币计量,因而称为货币计量的间接效用函数. 自然地用差额

$$\Delta W(p^0) = W(p^1) - W(p^0)$$

来量度当价格从 p^0 变动到 p^1 时消费者的福利增进. 下面就简称 $\Delta W(p^0)$ 为福利增进. "增进"一词当然应在代数意义上理解,即当 $\Delta W(p^0) < 0$ 时,消费者损失了福利 $-\Delta W(p^0)$,因而实际上是福利损失.

为确定起见,应取定式(2-47)中的 $\bar{p}$. 最自然的选择是取 $\bar{p} = p^0$ 或 p^1. 因此定义

$$\begin{aligned}\text{EV} &= e(p^0,v(p^1,w)) - e(p^0,v(p^0,w)) \\ &= e(p^0,v(p^1,w)) - w;\end{aligned} \tag{2-48}$$

$$\begin{aligned}\text{CV} &= e(p^1,v(p^1,w)) - e(p^1,v(p^0,w)) \\ &= w - e(p^1,v(p^0,w)).\end{aligned} \tag{2-49}$$

EV 与 *CV* 分别称为等价差额与补偿差额. 令 $u^i = v(p^i,w)(i = 0, 1)$,则 *EV* 与 *CV* 可简写为

$$\text{EV} = e(p^0,u^1) - w, \quad \text{CV} = w - e(p^1,u^0). \tag{2-50}$$

$e(p^0,u^1)$ 表示消费者为实现新价格下的最优效用 u^1,按原价格 p^0

应支付的货币量.因此,价格的变动使得 w 的价值与 $w+\mathrm{EV}$ 相当,EV就是消费者从价格变动中所获得的收益(当EV <0 时是损失).对CV可作类似的解释.

因 $e(p,u)$ 对 u 严格单调增(2.2.3小节),故

$$\mathrm{EV}>0 \Leftrightarrow u^1>u^0 \Leftrightarrow \mathrm{CV}>0.$$

同理,$\mathrm{EV}=0 \Leftrightarrow \mathrm{CV}=0$. 可见EV与CV有相同的符号.这就保证了用EV与CV量度福利增进不致得出互相矛盾的结果.不过,在数量上EV与CV未必相同.

依式(2-50)准确地计算EV与CV仍然不是容易的事.如果仅仅作出符号判断,问题就要简单得多.下面是一个简单而有用的定性结果.

命题 2.3 设 $x^0=x(p^0,w)$, $\Delta p=p^1-p^0$.

1° 若 $x^0\cdot\Delta p<0$,则当价格从 p^0 变到 p^1 时消费者严格地增进福利.

2° 若 $x^0\cdot\Delta p>0$, $\alpha>0$ 充分小,则当价格从 p^0 变到 $\bar{p}=\alpha' p^0+\alpha p^1$ 时,消费者严格地损失福利.

证 1° 只需判定 $CV>0$. 依式(2-49)并用Taylor公式,有

$$\begin{aligned}
-\mathrm{CV} &= e(p^1,u^0)-e(p^0,u^0)\\
&= \frac{\partial e(p^0,u^0)}{\partial p}\Delta p+\frac{1}{2}(\Delta p)^{\mathrm{T}}\nabla_p^2 e(\bar{p},u^0)\Delta p\\
&\leqslant h(p^0,u^0)\cdot\Delta p \qquad (\text{用式(2-38)})\\
&= x^0\cdot\Delta p<0, \qquad (\text{用式(2-18)})
\end{aligned}$$

其中,用到 $\nabla_p^2 e(\bar{p},u^0)$ 负半定(2.2.5小节),$\bar{p}$ 在连结 p^0,p^1 的线段上.

2° 只需判定 $\mathrm{CV}<0$,但用式(2-49)计算CV时以 $\bar{p}$ 取代 p^1,即

$$\begin{aligned}
\mathrm{CV} &= e(\bar{p},v(\bar{p},w))-e(\bar{p},v(p^0,w))\\
&= e(p^0,u^0)-e(\bar{p},u^0) \qquad (\text{用 } w=e(p^0,u^0))\\
&= -x^0\cdot(\bar{p}-p^0)+o(|\bar{p}-p^0|)
\end{aligned}$$

$$= -\alpha x^0 \cdot \Delta p + o(\alpha) < 0. \qquad \square$$

2.3.2 积分表示

因 $\partial e(p,u)/\partial p = h(p,u)$(式(2-38)),故由式(2-48)有

$$\begin{aligned}\mathrm{EV} &= e(p^0,u^1) - e(p^1,u^1) \\ &= \int_{p^1}^{p^0} \frac{\partial e(p,u^1)}{\partial p} \cdot \mathrm{d}p \\ &= \int_{p^1}^{p^0} h(p,u^1) \cdot \mathrm{d}p,\end{aligned}$$

其中 $h \cdot \mathrm{d}p = \sum h_l \mathrm{d}p_l$,积分是在 $\mathbf{R}^L_{++}$ 内沿任一从 p^1 到 p^0 的路径取的,例如,可沿从 p^1 到 p^0 的直线段或折线积分. 对 CV 亦有类似的结果. 这就得到 EV 与 CV 的积分表示

$$\begin{cases}\mathrm{EV} = \int_{p^1}^{p^0} h(p,u^1) \cdot \mathrm{d}p, \\ \mathrm{CV} = \int_{p^1}^{p^0} h(p,u^0) \cdot \mathrm{d}p.\end{cases} \tag{2-51}$$

式(2-51)的解释是:当价格从 p 变到 $p + \mathrm{d}p$ 时,消费者为保持效用水平 u^1 而承受的福利变化为 $h(p,u^1) \cdot \mathrm{d}p$;而EV则是这种变化的总和. 对CV有类似的解释. 注意式(2-51)中两个积分的惟一区别是,取为参照标准的效用水平不同,分别为 u^1 与 u^0.

为更清楚地显示式(2-51)的直观意义,仅考虑商品1的价格从 p_1^0 变到 p_1^1 这一特殊情况. 下面的讨论推广到一般情况并无原则困难. 为确定起见,假定 $p_1^1 < p_1^0$(降价),从而由 $v(p,w)$ 对 p 单调减有 $u^1 \geq u^0$(参见2.1.3小节),不妨设 $u^1 > u^0$. 假定商品1是正常品,即 $\partial x_1(p,w)/\partial w > 0$,于是

$$\frac{\partial h_1(p,u)}{\partial u} = \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w}\frac{\partial e(p,u)}{\partial u} > 0 \quad (u = v(p,w)).$$

其次,由 $e(p,u)$ 对 p 为凹函数(2.2.3小节)有

$$\frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_1^2} \leqslant 0.$$

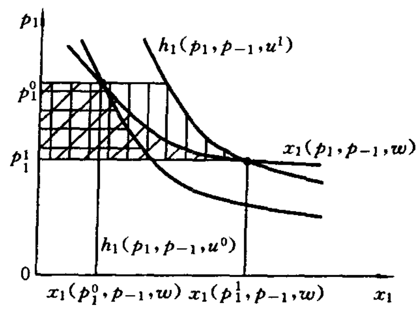


图 2-4

综合以上事实，可知在(x_1,p_1)平面上曲线 $x_1 = h_1(p_1,p_{-1},u^i)(i = 0,1)$ 的走势与位置关系如图 2-4 所示. *EV* 与 *CV* 分别为图中用垂直与水平阴影线标出的面积. 若以 *AV* 记图中用斜阴影线标出的面积，则

$$\mathrm{AV} = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x(p,w)\cdot \mathrm{d}p, \tag{2-52}$$

称 *AV* 为面积差额. 在 $0 < p_1^1 < p_1^0$ 的情况下，直接看出

$$0<CV<AV<EV. \tag{2-53}$$

若 $0 < p_1^0 < p_1^1$，则不等式(2-53) 变为

$$0 > \mathrm{EV} > \mathrm{AV} > \mathrm{CV}. \tag{2-54}$$

不要误认为式(2-54)是倒转式(2-53)的结果. 实际上，顺序关系 $CV<AV<EV$ 与价格变动方向无关. 若 $\partial x_1(p,w)/\partial w \equiv 0$，则 $\partial h_1(p,u)/\partial u \equiv 0$，此时图 2-4 中的三条曲线重合，从而

$$CV=AV=EV.$$

三者的公共值就是 Marshall 所说的消费者剩余.

若商品是次品，则 $\partial h_1(p,u)/\partial u < 0$，图 2-4 中曲线 $x = h(p,u^i)(i = 0,1)$ 的位置关系恰好倒转，因而不等式(2-53)、(2-54) 中的 EV 与 CV 应交换位置.

积分表示式(2-51) 作为一个理论分析工具有其优势，但用来准确测定福利变化却仍然很受局限. 问题在于，对式(2-51) 中所用到的函数 $h(p,u)$，我们多半不具备足够的信息.

2.3.3 征税的福利损失

作为上述福利分析方法的一个应用实例，考虑政府税收的福利效果.

为讨论方便，考虑仅对商品 1 课税的情况. 下面所用的方法很容易推广到一般的情况. 政府可依两种方式对消费者征税：其一是商品税，消费者每购买一单位商品 1 需纳税 t，其效果相当于商品价格从 p_1^0 提高到 $p_1^1 = p_1^0 + t, t > 0$ 是税率；其二是财产税，政府一次性地对消费者征税 T. 假定两种税收总量相等，即

$$T = tx_1(p_1^1, p_{-1}, w).$$

就政府收入而言，两种征税方式并无区别. 至于对消费者是否一样，则未必容易从直观上作出常识判断. 下面运用前两段引进的福利分析方法加以讨论. 若用财产税，消费者的福利损失就是 T. 若用商品税，则消费者蒙受的福利损失为 $-\mathrm{EV}$；依式(2-51)有

$$-\mathrm{EV} = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(p_1, p_{-1}, u^1)\mathrm{d}p_1.$$

于是

$$\begin{aligned} -\mathrm{EV} - T &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(p_1, p_{-1}, u^1)\mathrm{d}p_1 - tx_1(p_1^1, p_{-1}, w) \\ &= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, p_{-1}, u^1) - h_1(p_1^1, p_{-1}, u^1)]\mathrm{d}p_1. \end{aligned} \tag{2-55}$$

对于正常品 1，前面已指出 $\partial h_1/\partial p_1 \leqslant 0$，因此

$$h_1(p_1, p_{-1}, u^1) \geqslant h_1(p_1^1, p_{-1}, u^1)$$
$$(p_1^0 \leqslant p_1 \leqslant p_1^1 = p_1^0 + t).$$

于是由式(2-55)推出 $-\mathrm{EV} \geqslant T$，这表明商品税与财产税相比，消费者的福利损失较大. 差额 $-\mathrm{EV} - T$ 称为商品税的无谓损失. 在几何上，无谓损失由图 2-5 中描出阴影线的面积表示.

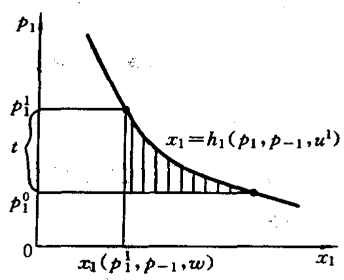


图 2-5

若以 u^0 代替 u^1，则得到商品税的另一种形式的福利损失：

$$-\mathrm{CV}-T=\int_{p_1^0}^{p_1^1}h_1(p_1,p_{-1},u^0)\mathrm{d}p_1-th_1(p_1^1,p_{-1},u^0)$$

$$=\int_{p_1^0}^{p_1^0+t}[h_1(p_1,p_{-1},u^0)-h_1(p_1^1,p_{-1},u^0)]\mathrm{d}p_1.$$

后者的几何表示类似于图 2-5. 如果政府在征收商品税的同时又给予消费者补偿，使消费者的支付能力足以保持税前效用水平 u^0 而无福利损失，则政府必然承受亏损，亏损额正是 $-\mathrm{CV}-T$.

2.4 总 需 求

设一经济中有 I 个消费者. 消费者 $i(1\leqslant i\leqslant I)$ 的偏好、财富与需求函数分别记作 $\succcurlyeq_i$，w_i 与 $x_i(p,w_i)$，令 $w=\sum w_i$（社会总财富）. 至于社会总需求或市场需求，自然是诸个体需求的加总，即

$$x(p,w_1,w_2,\cdots,w_I)=\sum_i x_i(p,w_i). \qquad (2\text{-}56)$$

如果总需求函数 $x(p,w_1,w_2,\cdots,w_I)$ 没有某些类似于个体需求函数的良好性质，那么加总公式(2-56) 并无实质意义. 因此，我们提出以下问题：

(1) $x(p,w_1,w_2,\cdots,w_I)$ 能否表示为(p,w) 的函数？

(2) 总需求函数是否具有个体需求函数的那些性质？

(3) 能否将福利分析的方法用于总需求？

在一定的条件下，以上问题可获得肯定的解答.

2.4.1 总需求函数

$x(p,w_1,w_2,\cdots,w_I)$ 恒可表示为(p,w) 的函数意味着：若(w_i) 与(w_i') 是社会总财富 w 的任意两种分配，即 $\sum w_i=\sum w_i'=w$，则有

$$\sum_i x_i(p,w_i)=\sum_i x_i(p,w_i').$$

也就是说，在总财富固定的条件下，社会总需求与财富分配无关.

这当然是极不寻常的事，它必定要求诸个体需求满足一些很强的条件，这些条件由以下定理所刻画.

定理 2.5 以下条件互相等价：

1° $x(p,w_1,w_2,\cdots,w_I)$ 恒为 (p,w) 的函数；

2° $\forall\ i\in I$，$\partial x_i(p,w_i)/\partial w_i$ 是 p 的函数；

3° $\forall\ i\in I$，存在 $\succcurlyeq_i$ 的效用表示 $u_i(\cdot)$，使 $v_i(p,w_i)=u_i(x_i(p,w_i))$ 可写成如下的 Gorman 形式

$$v_i(p,w_i)=a_i(p)+b(p)w_i \quad (1\leqslant i\leqslant I). \tag{2-57}$$

证 1°⇒2° 固定 $p\gg 0$ 与 $w=\sum w_i$. 从 $\sum x_i(p,w_i)=x(p,w)$ 得出

$$\sum_i \frac{\partial x_i(p,w_i)}{\partial w_i}\mathrm{d}w_i=0.$$

这与 $\sum \mathrm{d}w_i=0$ 比较得出，向量

$$N_l=\left[\frac{\partial x_{1l}(p,w_1)}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial x_{Il}(p,w_I)}{\partial w_I}\right]^{\mathrm{T}} \quad (1\leqslant l\leqslant L)$$

都平行于超平面 $\sum \mathrm{d}w_i=0$ 的法向量 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. 设 $N_l=\lambda_l\boldsymbol{e}$，则 $\partial x_{il}(p,w_i)/\partial w_i=\lambda_l$，从而 $\partial x_i(p,w_i)/\partial w_i$ 与 w_i 无关.

2°⇒3° 的证明从略.

3°⇒1° 设 $v_i(p,w_i)$ 表为式(2-57)，则

$$\begin{aligned}\sum_i x_i(p,w_i)&=-\sum_i \frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial p}\Big/\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial w_i} \quad \text{(用 Roy 恒等式)}\\&=-\sum_i\left[\frac{\partial a_i(p)}{\partial p}+w_i\frac{\partial b(p)}{\partial p}\right]\Big/b(p)\\&=-\frac{1}{b(p)}\left[\sum_i\frac{\partial a_i(p)}{\partial p}+w\frac{\partial b(p)}{\partial p}\right]\end{aligned}$$

已是 (p,w) 的函数. □

定理 2.5 条件中 $x_i(p,w_i)$ 与 $v_i(p,w_i)$ 的极端特殊性表明，要求总需求完全与社会财富的分配无关是高度不现实的. 但这一结论并不意味着，在某些特定的财富分配方式下，总需求都不能表成

(p,w) 的函数. 实际上，只要每个 w_i 是 (p,w) 的函数，即

$$w_i = w_i(p,w), \quad \sum_i w_i = w, \tag{2-58}$$

则总需求

$$x(p,w) = \sum_i x_i(p,w_i(p,w)) \tag{2-59}$$

显然是 (p,w) 的函数. 满足式(2-58)的(w_i)称为一个财富分配规则或简称为分配规则. 最简单的分配规则是

$$w_i = \alpha_i w, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_i \alpha_i = 1. \tag{2-60}$$

在这种分配规则下，个体占有社会总财富的固定份额 α_i.

2.4.2 总体需求定律

设总需求函数 $x(p,w)$ 表为式(2-59)，其中$\{w_i(p,w)\}$是给定的分配规则. 现在讨论 $x(p,w)$ 是否具有2.1.2小节中所描述的那些性质. 当然，对 $x_i(p,w_i)$ 与 $w_i(p,w)$ 要作某些假定. 下面假定 $x_i(p,w_i)$ 是单值的，而每个 $w_i(p,w)$ 是1次齐次的连续函数. 在此假定下，利用式(2-59) 容易验证：$x(p,w)$ 是0次齐次的单值连续函数，它满足 Walras 定律. 唯一成问题的是补偿需求定律，这正是下面要详细讨论的.

由2.1.2小节，每一个 $x_i(p,w_i)$ 都满足补偿需求定律，即满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_i(p,w_i) \neq x_i(p',w_i') \\ p' \cdot x_i(p,w_i) = w_i' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x_i < 0, \tag{2-61}$$

其中，$\Delta p = p' - p, \Delta x_i = x_i(p',w_i') - x_i(p,w_i)$. 总需求 $x(p,w)$ 不一定满足补偿需求定律的原因在于，尽管从式(2-61)的结论 $\Delta p \cdot \Delta x_i < 0$ 加总可得到 $\Delta p \cdot \Delta x < 0$，其中

$$\Delta x = x(p',w') - x(p,w); \tag{2-62}$$

但从

$$x(p,w) \neq x(p',w'), \quad p' \cdot x(p,w) = w' \tag{2-63}$$

却未必能推出 $p' \cdot x_i(p,w_i) = w_i'$. 为了保证 $x(p,w)$ 满足补偿需求定律，人们想到的一个办法是：对每个 $x_i(p,w_i)$ 附加一个比补偿需求定律更强的条件，该条件能被总需求所继承. 这样的条件就是所谓非补偿需求定律.

定义 2.2 若一个需求函数 $x(p,w)$ 满足条件

$$x(p,w) \neq x(p',w) \Rightarrow \Delta p \cdot [x(p',w) - x(p,w)] < 0, \tag{2-64}$$

其中，$\Delta p = p' - p$，则说 $x(p,w)$ 满足非补偿需求定律(ULD).

命题 2.4 1° 若 $x(p,w)$ 满足 ULD，则它亦满足补偿需求定律.

2° 若每个 $x_i(p,w_i)$ 满足 ULD，$w_i(p,w)$ 与 p 无关，则总需求函数式(2-59) 亦满足 ULD，因而满足补偿需求定律.

证 1° 设条件 (2-63) 满足. 由齐次性有 $x(p',w') = x\left(\frac{w}{w'}p',w\right)$，于是由式(2-64) 得出

$$\begin{aligned} 0 &> \left(\frac{w}{w'}p' - p\right) \cdot \Delta x && (\text{用式(2-62)}) \\ &= \left(\frac{w}{w'}p' - p'\right) \cdot \Delta x + \Delta p \cdot \Delta x && (\Delta p = p' - p) \\ &= \Delta p \cdot \Delta x, && (\text{用式(2-63)}) \end{aligned}$$

这表明 $x(p,w)$ 满足补偿需求定律.

2° 由每个 $x_i(p,w_i)$ 满足 ULD 推出

$$\Delta p \cdot [x_i(p',w_i) - x_i(p,w_i)] \leqslant 0, \tag{2-65}$$

其中，$\Delta p = p' - p$. 若 $x(p,w) \neq x(p',w)$，则对某个 $i \in I$ 有 $x_i(p,w_i) \neq x_i(p',w_i)$，对此 i，式(2-65) 为严格不等式. 因此，加总之后得出

$$\Delta p \cdot [x(p',w) - x(p,w)] < 0,$$

这表明 $x(p,w)$ 满足 ULD. □

一旦确定 $x(p,w)$ 满足补偿需求定律，从而 $x(p,w)$ 具有 2.1.2 小节中对个体需求函数建立的所有性质，那么就可将所有

基于这些性质的结论用于总需求函数，因而在一定程度上可如同个体需求函数一样运用它. 对于补偿需求定律，在下节中还要作进一步的讨论.

2.4.3 代表消费者

设 $x(p,w)$ 是表为式(2-59) 的总需求函数. 上段中已经说明 $x(p,w)$ 具有个体需求函数的许多性质. 但能否断定 $x(p,w)$ 是按某个社会偏好 $\succcurlyeq$ 选择的结果？这无疑是一个令人感兴趣的问题，它的解答绝不是平凡的. 让我们先引入一个概念.

定义 2.3 若存在 $\mathbf{R}_+^L$ 上的理性偏好 $\succcurlyeq$，它恰以 $x(p,w)$ 为其 Walras 需求函数，则称 $\succcurlyeq$ 为*代表消费者*.

可将代表消费者看作一个虚拟的个体，他具有偏好 $\succcurlyeq$，并依此偏好进行消费选择，而选择的结果决定了社会总需求 $x(p,w)$. 在形式上，$x(p,w)$ 与个体需求函数实质上已无任何差别，因而可对之应用 2.1 ～ 2.3 节中的所有结果. 这正是代表消费者概念的优点. 简单地说，通过这一概念，将一种非个人意志决定的社会行为个性化了. 然而，我们要立即指出以下几点：

(1) 定义 2.3 并未确立代表消费者的存在性，显然，这是一个非常严重的问题.

(2) 即使代表消费者存在，也并不意味着存在一个意志主体（如某个决策者或社会管理机构），他恰好按照社会偏好 $\succcurlyeq$ 实行社会选择.

(3) 尽管社会总需求 $x(p,w)$ 恰好符合代表消费者的最优选择，但这并不意味着它能真正体现对社会福利的有效评价.

现在首先来看最后这个问题如何解决. 选定一个函数 $W(\cdot):\mathbf{R}^I\to\mathbf{R}$，对每一组个体效用水平 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_I)\in\mathbf{R}^I$，以 $W(u)$ 作为对 $(u_1,u_2,\cdots,u_I)$ 的综合评价，称 $W(u)$ 为社会效用；而 $W(\cdot)$ 就称为*社会福利函数*. 如果代表消费者所追求的恰好是最优社会效用，那么，他的问题就在于解如下社会福利最大化

问题

$$\begin{cases}\max W(v_1(p,w_1),\cdots,v_I(p,w_I))=v(p,w),\\ \text{s.t.}\ \sum_i w_i=w,\end{cases}\tag{2-66}$$

其中 $(p,w)\gg 0$ 是给定的,值函数 $v(p,w)$ 称为社会间接效用函数,它表示依据 $W(\cdot)$ 的最优社会效用.

以上讨论只是给社会福利问题提供了一个概念框架,它仍然留下一些明显的问题.首先,上面完全没有提及应如何选择社会福利函数 $W(\cdot)$.一个随意指定的函数 $W(\cdot):\mathbf{R}^I\to\mathbf{R}$ 未必符合人们关于社会效用的常识判断.一个好的社会福利函数应当满足某些自然的条件,例如,它应是连续的、单调增的凹函数,凹性体现了社会高估福利均衡分布的倾向(参见 9.2 节).其次,判定最大化问题(2-66)的可解性也是一个问题.姑且假定式(2-66)的解恒存且惟一,则它的解 $(w_1(p,w),w_2(p,w),\cdots,w_I(p,w))$ 满足式(2-58),因而构成一个财富分配规则,称为最优分配规则.依此分配规则得到用式(2-59)表出的总需求函数 $x(p,w)$.但这样一来又产生一个问题:如果 $x(p,w)$ 是某个代表消费者的 Walras 需求函数,那么问题(2-66)的值函数 $v(p,w)$ 恰为其间接效用函数吗?这一问题由以下出色的定理给予了肯定解答.

定理 2.6 设 $W(\cdot):\mathbf{R}^I\to\mathbf{R}$ 是可微的、单调增的、凹的社会福利函数,$(w_1(p,w),w_2(p,w),\cdots,w_I(p,w))$ 是问题(2-66)的解,每个 $w_i(p,w)$ 是1次齐次的可微函数,$x(p,w)$ 表为式(2-59).则存在代表消费者,他恰以 $x(p,w)$ 与 $v(p,w)$(依问题(2-66))为 Walras 需求函数与间接效用函数.

这一重要定理的证明颇不容易,下面只简述其证明思路.

1° 逐一验证 $v(p,w)$ 具有个体间接效用函数的主要性质(参见 2.1.3 小节).

2° 证明存在 $\mathbf{R}_+^L$ 上的偏好 $\succcurlyeq$ 及其效用表示 $u(\cdot)$,使其间接效用函数恰为 $v(p,w)$.这是整个证明的核心部分,它集中了问题的

主要困难.

3° 验证 $\succcurlyeq$ 以 $x(p,w)$ 为需求函数,这一步已无困难.由 Roy 恒等式(式(2-39)),只需验证

$$x(p,w)=-\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}\Big/\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}.$$

对问题(2-66) 应用 K-T 条件,知有 $\lambda\in\mathbf{R}$,使得

$$\frac{\partial W(u)}{\partial u_i}\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial w_i}=\lambda\quad(1\leqslant i\leqslant I).\tag{2-67}$$

这推出

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}&=\sum_i\frac{\partial W(u)}{\partial u_i}\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial w_i}\frac{\partial w_i(p,w)}{\partial w}\\&=\lambda\sum_i\frac{\partial w_i(p,w)}{\partial w}=\lambda.\end{aligned}\tag{2-68}$$

于是

$$\begin{aligned}x(p,w)&=\sum_i x_i(p,w_i)\\&=-\sum_i\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial p}\Big/\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial w_i}\qquad(\text{用式(2-39)})\\&=-\frac{1}{\lambda}\sum_i\frac{\partial W(u)}{\partial u_i}\frac{\partial v_i(p,w_i)}{\partial p}\qquad(\text{用式(2-67)})\\&=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}\\&=-\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}\Big/\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}.\qquad(\text{用式(2-68)})\end{aligned}$$

若一代表消费者的间接效用函数恰为某一形如问题(2-66)的社会福利最大化问题的值函数,则称之为规范代表消费者.与此相区别,定义 2.3 所界定的代表消费者就称为实证代表消费者.因规范代表消费者的效用水平正是社会福利的最优水平,因此,不妨设想,正是规范代表消费者"代表个体消费者"追求最大的社会福利.而定理 2.6 则保证了一定条件下规范代表消费者的存在性.如果将其人格化,你还可以进一步断言:存在一个全能的权威人物,他

通过一次性的财产再分配，恰到好处地实现全体消费者的最大福利. 这真是妙不可言！然而，下述理由将使你的乐观有所保留. 首先，逻辑上的存在性与现实上的可能性远不是一回事. 其次，或许更重要的是：对于选取什么函数来有效地评价社会福利，人们恐怕永远难以完全达成共识！

*2.5 基于选择的需求理论

在上节中我们遇到这样的问题：如果总需求函数 $x(p,w)$ 具有个体需求函数的基本性质，即使不知道它是否为某个社会偏好 $\succcurlyeq$ 的 Walras 需求函数，也能对总需求展开系统的研究. 本节更详细地讨论这一问题. 这一课题是 1.3 节中导入的选择结构概念的自然延伸.

2.5.1 需求函数的公理化定义

仍取选择集 $X = \mathbf{R}_+^L$，令

$$\mathscr{B} = \{B_{p,w} : (p,w) \gg 0\}. \tag{2-69}$$

若 $x(p,w)$ 是 Walras 需求函数，令 $C(B_{p,w}) = x(p,w)$，则在 2.1 节的条件下 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 正是一个 1.3.1 小节意义下的选择结构. 现在我们换一个思路，不以某个给定的偏好作为出发点，而是直接给定一个需求函数 $x(p,w)$，并限定它满足适当的公理要求，然后以所给公理作为出发点，推导出 $x(p,w)$ 的各种性质. 可以预期，如此导入的需求理论将具有更大的一般性. 最主要的是，新的需求理论摆脱了总让人感到不踏实的偏好概念. 偏好是一种个人心理体验，似乎很难服从于严格的逻辑分析，这就使偏好理论不免招致各种批评.

定义 2.4 设 $C(\cdot)$ 是 $\mathscr{B}$(依式(2-69)) 上的一个选择规则，$x(p,w) = C(B_{p,w})((p,w) \gg 0)$. 当以下公理满足时称 $x(p,w)$ 为一个 Walras 需求函数.

(A_1) 齐次性： $x(\alpha p,\alpha w)=x(p,w)\quad(\forall\ \alpha>0)$[①].

(A_2) Walras 定律： $p\cdot x(p,w)=w$.

(A_3) 补偿需求定律： 设 $x\in x(p,w),x'\in x(p',w'),\Delta p=p'-p,\Delta x=x'-x$,则

$$p'\cdot x=w'\Rightarrow \Delta p\cdot\Delta x\leqslant 0,$$

且仅当 $x'\in x(p,w)$ 与 $x\in x(p',w')$ 时 $\Delta p\cdot\Delta x=0$.

与 2.1.2 小节对照看出，2.1 节中所定义的 Walras 需求函数，必然符合定义 2.4 的条件.

在定义 2.4 中，公理(A_3) 显得复杂些，下面特别加以讨论. 因

$$\begin{aligned}\Delta p\cdot\Delta x&=(p'-p)\cdot(x'-x)\\&=(w'-p'\cdot x)+(w-p\cdot x'),\end{aligned}$$

故从(A_3)推出

$$\left.\begin{array}{ll}x\in x(p,w), & x'\in x(p',w')\\ p\cdot x'\leqslant w, & p'\cdot x=w'\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x'\in x(p,w),\\ x\in x(p',w').\end{array}\right.\tag{2-70}$$

另一方面，定义 2.4 中的 $C(\cdot)$ 满足 (WA)(1.3.1 小节)意味着

$$\left.\begin{array}{ll}x\in x(p,w), & x'\in x(p',w')\\ p\cdot x'\leqslant w, & p'\cdot x\leqslant w'\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x'\in x(p,w),\\ x\in x(p',w').\end{array}\right.\tag{2-71}$$

显然式(2-71)⇒式(2-70). 实际上，可建立更强的结论：

定理 2.7 设选择规则 $C(B_{p,w})=x(p,w)$ 满足定义 2.4 中公理 (A_1)、(A_2)，则它也满足公理(A_3)的充要条件是它满足 (WA).

证 只须证补偿需求定律⇒(WA). 假定

$$\left\{\begin{array}{l}x\in x(p,w),\quad x'\in x(p',w'),\quad x'\overline{\in}\, x(p,w),\\ p\cdot x'\leqslant w,p'\cdot x\leqslant w'.\end{array}\right.\tag{2-72}$$

---

① 因 $B_{\alpha p,\alpha w}=B_{p,w}$，故($A_1$)实际上是定义式 $x(p,w)=C(B_{p,w})$ 的直接推论，逻辑上不必列入假设. 此处作为公理以便于引用.

今从式(2-72)导出矛盾. 必定 $p \cdot x' < w, p' \cdot x < w'$,否则从式(2-70) 将推出 $x' \in x(p,w)$. 令 $\Delta x = x' - x$,则易验证

$$p \cdot \Delta x < 0 < p' \cdot \Delta x.$$

由介值定理,有 $\alpha \in (0,1)$,使得 $\bar{p} \triangleq \alpha p + \alpha' p'$ 满足

$$\bar{p} \cdot \Delta x = 0, \bar{p} \cdot x = \bar{p} \cdot x' \triangleq \bar{w}. \tag{2-73}$$

取 $\bar{x} \in x(\bar{p},\bar{w})$,则由补偿需求定律推出

$$0 \geqslant (\bar{p} - p) \cdot (\bar{x} - x) = w - p \cdot \bar{x},$$

即 $w \leqslant p \cdot \bar{x}$. 同理 $w' \leqslant p' \cdot \bar{x}$. 于是

$$\begin{aligned} \alpha w + \alpha' w' &\leqslant (\alpha p + \alpha' p') \cdot \bar{x} = \bar{p} \cdot \bar{x} \\ &= \bar{w} = \bar{p} \cdot x = (\alpha p + \alpha' p') \cdot x \\ &= \alpha p \cdot x + \alpha' p' \cdot x < \alpha w + \alpha' w', \end{aligned}$$

得出矛盾. □

由定理 2.7 特别推出,2.1 节意义下的需求函数 $x(p,w)$ 必定满足(WA). 这充分显示出(WA) 对于需求理论的基本意义.

2.5.2 Slutsky 矩阵

设 $x(p,w)$ 是如定义 2.4 所述的需求函数,假定它是单值可微函数. 如同式(2-40),定义 Slutsky 矩阵为

$$\boldsymbol{S}(p,w) = \frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} \boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}. \tag{2-74}$$

今指明在 2.2.5 小节中对 $\boldsymbol{S}(p,w)$ 建立的某些结论此处仍然有效.

给定 $(p,w) \gg 0$,令 $p' = p + \mathrm{d}p, w' = w + \mathrm{d}w$,则由公理 (A_3) 有

$$(p + \mathrm{d}p) \cdot x(p,w) = w + \mathrm{d}w \Rightarrow \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}x(p,w) \leqslant 0.$$

因此,在 $(p + \mathrm{d}p) \cdot x(p,w) = w + \mathrm{d}w$ 的条件下,有

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}p \cdot x(p,w);$$

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}x(p,w) \\ &= \mathrm{d}p \cdot \left[\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\mathrm{d}w\right] \end{aligned}$$

$$= dp \cdot \left[\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}dp + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}dp\right]$$

$$= (d\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(p,w)dp. \qquad (用式(2\text{-}74))$$

由 dp 的任意性，得出 $\boldsymbol{S}(p,w)$ 是负半定的.

值得注意的是，$\boldsymbol{S}(p,w)$ 不一定是对称的. 而在 2.2 节中，$\boldsymbol{S}(p,w)$ 一定是对称的. 这就表明，满足公理 $(A_1)\sim(A_3)$ 的需求函数不一定由某个理性偏好导出.

基于齐次性及 Walras 定律的恒等式(2-35)与式(2-12)当然保持有效，它们是

$$\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}p + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}w = 0; \tag{2-75}$$

$$x(p,w) = -\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}; \tag{2-76}$$

$$p \cdot \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} = 1. \tag{2-77}$$

利用这些恒等式，可以推出

$$\boldsymbol{S}(p,w)p = \frac{\partial x(p,w)}{\partial p}p + \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}p \qquad (用式(2\text{-}74))$$

$$= \frac{\partial x(p,w)}{\partial w}[p \cdot x(p,w) - w] \qquad (用式(2\text{-}75))$$

$$= 0;$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(p,w) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}}$$

$$= \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\frac{\partial x(p,w)}{\partial p} + \boldsymbol{x}(p,w)^{\mathrm{T}} \qquad (用式(2\text{-}77))$$

$$= 0. \qquad (用式(2\text{-}76))$$

以上结果正好与式(2-43)相符.

第三章　生　　产

消费者消费的商品(包括服务)由生产提供，因此，生产构成经济的供应方面，自然成为经济学的主要研究对象之一.

作为生产主体的生产者，与消费者恰相对应，它由一些有独立决策功能的单位组成. 生产单位可以是公司，也可以是个体经营者或居民户，统称为厂商，其中包括那些并未实际生产但具有潜在生产能力的单位. 厂商的内部组织及生产过程，对于产业界与某些学科的研究者都有无可争议的重要性. 然而从市场行为的角度看，厂商的投入产出决策才具有真正的重要性. 因此，在本章中厂商被看做一个将投入变成产品的转换器，其内部结构与运行机制概不予考虑，因而被当成一个黑箱处理. 这样，就突出了厂商的选择行为及其市场后果. 在这个意义上，生产理论如同消费理论一样，成为个体选择理论的一部分.

生产者依据利润最大化或成本最小化原则选择其生产计划，在形式上这与消费者选择恰相对应. 注意到这种对应关系对于理解本章内容至关重要. 主要概念的引进与基本内容的展开都可以与第二章对照起来考虑，主要的对应关系如下：

消费者——生产者；

消费集 X—— 生产集 Y；

效用最大化 —— 利润最大化；

支出最小化 —— 成本最小化；

需求函数 —— 供应函数；

支出函数 —— 成本函数；

总需求 —— 总供应，

如此等等. 当然，生产自有它所固有的特性，有些内容并无适当的

消费概念与之对应.即使相互对应的概念,例如消费集与生产集,其内涵与形式的差别也很大.

3.1 生产集与生产函数

3.1.1 生产集

如同消费一样,生产者亦在商品空间 $\mathbf{R}^L$ 中进行选择,只是选择的目的有所不同.生产者选择一个 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_L)\in\mathbf{R}^L$,意味着他确立了一个生产计划或投入产出决策;$y$ 称为生产向量,其中的负分量表示投入,而正分量则表示产出.例如,设 $L=2$,$\mathbf{R}^2$ 是(肥料,谷物)空间,生产者选择生产向量 $(-2,5)$,意味着他计划投入 2 单位肥料,产出 5 单位谷物.

生产理论的基本课题,是依据一定的原则与已知信息确定或预测生产者的选择.很明显,如果生产者选择的范围小一些且更明确一些,以上问题的解决就更容易些.因此,确定生产者的选择集 $Y\subset\mathbf{R}^L$ 是重要的.Y 就称为生产者的生产集,它如同消费者的消费集 X 一样,是展开理论的出发点.Y 通常由生产技术所限定.例如,前面提到的谷物生产者不可能选择 $(-2,5)$,因这一生产计划在技术上是不可行的.有时法律、合同等因素的约束也对 Y 构成限制.技术、法律等等约束的多样性,注定了生产集的多样性,指定某个标准的或通用的生产集 Y 显然是不适当的①.尽管如此,我们还是可要求 Y 满足某些具有一定普遍性的条件.首先,不妨无例外地假定 Y 是非空闭集.进一步的假设则依情况与需要决定取舍.最主要的备选条件列举如下.

(P_1) 不存在无投入的产出: $Y\cap\mathbf{R}_+^L\subset\{0\}$,即若 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_L)\in Y$,有某个 $y_l>0$,就必有某个 $y_k<0$ $(1\leqslant l,k\leqslant$

① 与此形成明显对照的是,在通常的情况下总假定消费集 $X=\mathbf{R}_+^L$.

L).

(P_2) 不可逆性： $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$，即若 $y \in Y$，则必 $-y \overline{\in} Y$，除非 $y=0$. 这意味着不能将投入与产出换位：若投入 $-y_l$ 产出 y_{-l} 是一个可行的生产计划，则投入 y_{-l} 产出 $-y_{-l}$ 是不可行的，除非 $y=(y_l,y_{-l})=0$.

(P_3) 免费销毁： $Y-\mathbf{R}_+^L \subset Y$，即若 $y' \leqslant y \in Y$，则必 $y' \in Y$，这意味着，无限制地增加投入与减少产出在技术上总是可行的. 例如，可任意地销毁某些原料或报废某些产品. 当然，这丝毫不是说生产者一定有这样做的意愿，只是原则上不排除作此选择的可能性. 这一假设初看起来似乎有悖常理，但它对于理论分析是重要的.

(P_4) 容许停业： $0 \in Y$. 这一假设通常是合理的. 但也有例外的情况，例如有原料进货合同约束的情况就是如此.

条件(P_1) ~ (P_4) 通常可假定其被满足而不失一般性. 至于下面所述的规模收益条件与凸性条件，尽管对于许多结论是必不可少的，但并非是被普遍满足的.

(P_5) 规模收益性质：

常数规模收益　$\alpha Y \subset Y (\forall\ \alpha > 0)$，即 Y 是一个以 0 为顶点的锥. 这意味着可无限制地扩大或缩小生产规模.

递减规模收益　$\alpha Y \subset Y (\forall\ \alpha \in (0,1])$，即容许缩小生产规模.

递增规模收益　$\alpha Y \subset Y (\forall\ \alpha \geqslant 1)$，即容许扩大生产规模.

(P_6) 凸性： $\alpha Y + \alpha' Y \subset Y (\forall\ \alpha \in [0,1])$，即 Y 是一个凸集.

3.1.2　生产函数

上面讨论生产集 Y 时，并未特别指定哪些商品属于投入，哪些商品属于产出. 在同时考虑同一市场中的多个厂商时（如在均衡理论中），以上做法是适当的. 但对于单个厂商的成本与利润分析，区分投入与产出更加有利. 在实际生产活动中，一个厂商的投入与产

出通常是界线分明的.形式上,可用如下的记号明确地表出投入与产出,以

$$z=(z_1,z_2,\cdots,z_{L-M})\in\mathbf{R}_+^{L-M}$$

与

$$q=(q_1,q_2,\cdots,q_M)\in\mathbf{R}_+^M$$

分别记投入与产出,$y=(-z,q)$ 构成一个生产向量.如在经济学中已习惯的,用于生产投入的商品称为生产要素,简称为要素.例如劳务、资本、土地等就是主要的要素.

下面只考虑 $M=1$(即单一产品)的情况.这样会使将要展开的理论分析形式上简单得多,同时又不至于实质上丧失一般性.在生产多种产品的情况下,总可以用一个虚拟的复合产品来代替一组产品,这样处理并不影响下面要进行的利润与成本分析.这样,每个 $y\in Y$ 可表成

$$y=(-z,q)=(-z_1,-z_2,\cdots,-z_{L-1},q).$$

对每个 $z\in\mathbf{R}_+^{L-1}$,假定 $Q_z\triangleq\{q\in\mathbf{R}_+:(-z,q)\in Y\}$ 是非空紧集,于是存在

$$f(z)=\max_{q\in Q_z}q,\quad z\in\mathbf{R}_+^{L-1}.\tag{3-1}$$

式(3-1)定义出一个函数 $f:\mathbf{R}_+^{L-1}\to\mathbf{R}_+$,称它为厂商的生产函数;$f(z)$ 就是厂商投入 z 可能得到的最大产出.

反之,任给函数 $f:\mathbf{R}_+^{L-1}\to\mathbf{R}_+$,令

$$Y=\{(-z,q):z\in\mathbf{R}_+^{L-1},q\leqslant f(z)\},\tag{3-2}$$

则容易验证 $f(z)$ 正好可表成式(3-1).因此,对于单一产品的情况,完全可通过生产函数来刻画生产集(如图 3-1).

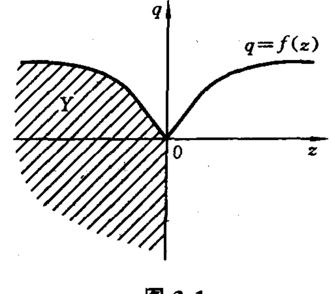


图 3-1

以下设 Y 表为式(3-2).一个基本的问题是:如何通过生产函数 $f(z)$ 的适当解析性质来表达生产集 Y 的相应性质?直接从式(3-2)看出 $Y\neq\varnothing$;当 $f(\cdot)$ 连续时 Y 是闭集.下面逐

个讨论 3.1.1 小节中提出的$(P_1) \sim (P_6)$.

1. $(P_1) \Leftrightarrow f(0)=0$. 事实上，由式(3-2)有

$$\begin{aligned} Y \cap \mathbf{R}_+^L &= \{(-z,q):\ \pm z \in \mathbf{R}_+^{L-1}, 0 \leqslant q \leqslant f(z)\} \\ &= \{(0,q): 0 \leqslant q \leqslant f(0)\} \\ &= \{0\} \Leftrightarrow f(0)=0. \end{aligned}$$

2. $(P_2) \Leftrightarrow f(0)=0$. 类似于上面的推理：

$$\begin{aligned} Y \cap (-Y) &= \{(-z,q):\ \pm z \in \mathbf{R}_+^{L-1},\ \pm q \leqslant f(\pm z)\} \\ &= \{(0,q):\ \pm q \leqslant f(0)\} \\ &= \{0\} \Leftrightarrow f(0)=0. \end{aligned}$$

假定 $f(0)=0$(无投入就无产出)是很自然的，而这就保证了生产集 Y 满足条件(P_1)、(P_2).

3. $(P_3) \Leftrightarrow f(\cdot)$ 单调增(多投入必多产出).

证 设 $0 \leqslant z \leqslant z'$. 若 Y 满足条件(P_3)，则从$(-z,f(z)) \in Y$ 推出$(-z',f(z)) \in Y$，从而 $f(z) \leqslant f(z')$. 可见 $f(\cdot)$ 单调增；反之，若 $f(\cdot)$ 单调增，$(-z,q) \in Y$，$(-z',q') \leqslant (-z,q)$，则

$$q' \leqslant q \leqslant f(z) \leqslant f(z'),$$

这表明$(-z',q') \in Y$. 因此 Y 满足条件(P_3). □

4. 由 $f(0) \geqslant 0$ 推出 Y 必定满足(P_4). 鉴于前面我们已经指出，对于生产集的条件$(P_1) \sim (P_4)$非常基本因而很难回避，因此，不妨假定所用到的生产函数 $f(z)$ 总是连续的、单调增的且 $f(0) = 0$. 下面进一步考虑的条件则只是选择性的.

5. Y 是常数规模收益的 $\Leftrightarrow f(\cdot)$ 是 1 次齐次的. 若 $f(\cdot)$ 是 α 次齐次的，则 Y 是常数规模收益、递减规模收益与递增规模收益分别对应 $\alpha=1$，$\alpha<1$ 与 $\alpha>1$.

证 取定 $\alpha>0$，首先证明

$$\alpha Y \subset Y \Leftrightarrow \alpha f(z) \leqslant f(\alpha z) \quad (\forall\ z \in \mathbf{R}_+^{L-1}). \tag{3-3}$$

若 $\alpha Y \subset Y$，$z \in \mathbf{R}_+^{L-1}$，则由$(-z,f(z)) \in Y$ 推出$(-\alpha z,\alpha f(z)) \in Y$，于是 $\alpha f(z) \leqslant f(\alpha z)$；反之，设 $\alpha f(z) \leqslant f(\alpha z)$，$(-z,q) \in Y$，则

$$\alpha q \leqslant \alpha f(z) \leqslant f(\alpha z),$$

这表明$(-\alpha z,\alpha q)\in Y$. 这就证得关系式(3-3). 由式(3-3) 容易推出要证的所有结论. □

6. Y 是凸集 $\Leftrightarrow f(\cdot)$ 是凹函数(如图 3-1).

证 首先设Y是凸集,$z,\bar{z}\in\mathbf{R}_+^{L-1}$,$\alpha\in[0,1]$. 由$(-z,f(z))\in Y$,$(-\bar{z},f(\bar{z}))\in Y$及$Y$的凸性得出

$$(-\alpha z-\alpha'\bar{z},\alpha f(z)+\alpha' f(\bar{z}))\in Y,$$

因此$\alpha f(z)+\alpha' f(\bar{z})\leqslant f(\alpha z+\alpha'\bar{z})$. 这表明$f(\cdot)$是凹函数. 反之,设$f(\cdot)$是凹函数,$(-z,q)\in Y$,$(-\bar{z},\bar{q})\in Y$,$\alpha\in[0,1]$,则

$$\alpha q+\alpha'\bar{q}\leqslant\alpha f(z)+\alpha' f(\bar{z})\leqslant f(\alpha z+\alpha'\bar{z}),$$

这推出$\alpha(-z,q)+\alpha'(-\bar{z},\bar{q})\in Y$. 因此$Y$是凸集. □

用一个典型例子来说明上述结论.

例 3.1(Cobb-Douglas 生产函数) 经济学中广泛使用如下生产函数(参见 1.2.2 小节)

$$f(z)=z_1^{\alpha}z_2^{\beta},\quad z=(z_1,z_2)\in\mathbf{R}_+^2,\tag{3-4}$$

其中α,β是正常数. $f(\cdot)$显然是连续的、单调增的且$f(0)=0$. 其次,因$f(\cdot)$是$\alpha+\beta$次齐次的,故生产是常数规模收益、递减规模收益与递增规模收益分别对应$\alpha+\beta=1$,$\alpha+\beta<1$与$\alpha+\beta>1$. 在 1.2.2 小节中已指明当$\alpha+\beta\leqslant1$时$f(\cdot)$是$\mathbf{R}_+^2$上的凹函数. 因此,当$\alpha+\beta\leqslant1$时,对应于$f(\cdot)$的生产集Y是凸集;当$\alpha+\beta=1$时Y是凸锥.

Cobb-Douglas 生产函数有明确且固定的规模收益性质,这是它的优点,但同时也是一个缺点:现实的生产很可能在产量较低时有递增规模收益,而在产量较高时有递减规模收益,这就不能用一个 Cobb-Douglas 生产函数描述.

3.2 利润最大化

本节解决与消费者的效用最大化相类似的问题,问题的表述及有关的结论都尽可能以与 2.1、2.2 节相对照的形式给出.

以下给定某厂商的生产集 Y.

3.2.1 利润最大化问题

如同消费者一样，厂商通常处在一个规模很大的市场中，他无法选择由市场决定的商品价格 $p(\in \mathbf{R}^L)$. 厂商的每一选择 $y \in Y$，都对应一个确定的利润 $p \cdot y = \sum p_l y_l$，它等于产出的价值(即收益)减去投入的价值(即成本)，因而是厂商的纯收益. 这里的情况颇类似于消费者从每一消费选择 $x \in X$ 获得确定的效用 $u(x)$. 但厂商所面对的情况更为简单：他的目标函数 $p \cdot y$ 以货币计量且有简单的表达式；他的选择除了受生产集 Y 的限制外，不受什么预算约束.

对于给定的 $p \gg 0$，认定厂商的选择行为服从于利润最大化原则. 在数学上，这意味着解如下的利润最大化问题(PMP)

$$\max\ p \cdot y = \pi(p), \quad \text{s.t.}\ y \in Y. \tag{3-5}$$

问题(3-5)中的 $\pi(p)$ 表最大利润值，即

$$\pi(p) = \max_{y \in Y} p \cdot y, \tag{3-6}$$

称它为利润函数. 以 $y(p)$ 记 PMP(3-5) 的解之全体. 在缺乏关于 Y 的一定信息的情况下，我们不能断定 $y(p) \neq \varnothing$；$y(\cdot)$ 的定义域(即使 $y(p) \neq \varnothing$ 的 p 之全体)D 可能比 $\mathbf{R}^L_{++}$ 要小一些，而且 $y(\cdot)$ 在 D 上一般是多值函数. 如上的 $y(\cdot)$ 称为供应函数①，它正是生产理论中与需求函数相对应的东西. 供应函数 $y(p)$ 与利润函数 $\pi(p)$ 一起完全刻画了厂商的行为，它们构成生产理论的主要研究对象. 从问题(3-5) 直接看出，$y(\cdot)$ 与 $\pi(\cdot)$ 满足恒等式

$$p \cdot y(p) = \pi(p). \tag{3-7}$$

3.2.2 函数 $y(p)$ 的性质

上面我们将问题(3-5)与问题(2-3)对照起来，这就自然将函

① 实际上，只有 $y(p)$ 的正分量才是厂商提供给市场的.

数 $y(p),\pi(p)$ 置于与函数 $x(p,w),v(p,w)$ 相对应的地位. 从利润最大化与效用最大化的类似性来看,以上对比似乎是适当的. 但从数学形式上细究起来,问题(3-5)其实更类似于消费者的支出最小化问题(参见式(2-15)):两者的目标函数分别为 $p \cdot y$ 与 $p \cdot x$,而 Y 则相当于消费者的选择集 $\{x \in \mathbf{R}_+^L : u(x) \geqslant u\}$. 至于 max 与 min 的区别则不是本质的,因恒有

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}[-f(x)].$$

这就毫不足怪,函数 $y(p),\pi(p)$(及下面的 $z(p,w),\pi(p,w)$)与函数 $h(p,u),e(p,u)$ 有更多的类似性. 因此,下面主要遵循 2.2 节中的思路.

1. 齐次性 $y(\alpha p) = y(p)(\forall\ \alpha > 0)$.

从数学上看,这是显然的. 从经济上说,价格按比例变动的效果,如同改变货币的计量单位,这自然不影响厂商生产计划的最优选择.

2. 边值性 $y(p) \subset \partial Y$,∂Y 记生产集 Y 的边界.

证 设 $y \in Y \backslash \partial Y$,则 y 是 Y 的内点,因而必有 $y' \in Y$,使 $y \ll y'$,这推出 $p \cdot y < p \cdot y'$. 因此 $p \cdot y$ 必非最大利润,即 $y \overline{\in} y(p)$.

□

读者想必还记得,$x(p,w)$ 含于预算集 $B_{p,w}$ 的边界,即超平面 $p \cdot x = w$ 上;$h(p,u)$ 含于集 $\{x : u(x) \geqslant u\}$ 的边界上. 顺便指出:"最优值在边界上达到"这一结论在本书中将多次出现.

3. 凸性与单值性 若 Y 是凸集,则对给定的 $p \gg 0$,$y(p)$ 为凸集;若 Y 是严格凸集,则 $y(p)$ 是其定义域内的单值函数. Y 是严格凸集意味着,Y 中任一线段的内点必为 Y 的内点.

证 固定 $p \gg 0$. 首先设 Y 是凸集,$y^0, y^1 \in y(p)$,$\alpha \in [0,1]$,则 $\overline{y} \triangleq \alpha y^0 + \alpha' y^1 \in Y$,

$$p \cdot \overline{y} = \alpha\pi(p) + \alpha'\pi(p) = \pi(p), \quad (\text{用式(3-7)})$$

这推出 $\overline{y} \in y(p)$. 因此 $y(p)$ 是凸集.

其次设 Y 严格凸,$y^0, y^1 \in y(p)$,$y^0 \neq y^1$,则 $\overline{y} \triangleq (y^0 + y^1)/2$

是Y的内点，因而$\bar{y} \in y(p)$. 但这与已证的$y(p)$为凸集相矛盾，因此$y(p)$不可能包含两个相异点. □

4. 连续性　$y(\cdot)$上半连续(参看定义 2.1)；若$y(\cdot)$在其定义域内单值且局部有界(即在每一点的一个邻域内有界)，则$y(\cdot)$在通常意义下连续.

证　设$y^n \in y(p^n)$, $p^n \to p \gg 0$, $y^n \to y(n \to \infty)$. 因Y是闭集，故$y \in Y$. $\forall\ y' \in Y$，有$p^n \cdot y' \leqslant p^n \cdot y^n(\forall\ n \in \mathbf{N})$. 令$n \to \infty$得$p \cdot y' \leqslant p \cdot y(\forall\ y' \in Y)$，这表明$y \in y(p)$. $y(\cdot)$的上半连续性得证.

其次设$y(\cdot)$单值且局部有界，$p^n \to p \gg 0$, $y^n = y(p^n)$. 由局部有界性，$\{y^n\}$必有界，因而有收敛子列. 设$y^{n'} \to y$，则由已证的上半连续性有$y = y(p)$，从而$y(p^{n'}) \to y(p)$. 将此结论用到$\{p^n\}$的每一子列得出$y(p^n) \to y(p)$. 因此$y(\cdot)$连续. □

5. 供应定律　设$p, p' \gg 0$, $y \in y(p)$, $y' \in y(p')$, $\Delta p = p' - p$, $\Delta y = y' - y$，则(对照式(2-23))

$$\Delta p \cdot \Delta y \geqslant 0, \tag{3-8}$$

且仅当$y \in y(p')$, $y' \in y(p)$时式(3-8)是等式.

证　直接应用式(3-7)有

$$\Delta p \cdot \Delta y = [\pi(p') - p' \cdot y] + [\pi(p) - p \cdot y'] \geqslant 0,$$

其中的$\geqslant$取等号$\Leftrightarrow \pi(p') - p' \cdot y = 0 = \pi(p) - p \cdot y' \Leftrightarrow y \in y(p')$, $y' \in y(p)$.

不等式(3-8)表明，供应与价格朝同一方向变化.

3.2.3　函数$\pi(p)$的性质

在一定程度上，$\pi(p)$具有类似于$e(p,u)$的性质(参见 2.2.3 小节).

1. 齐次性　$\pi(\alpha p) = \alpha\pi(p) \quad (\forall\ \alpha > 0)$.

这由式(3-7)及$y(\cdot)$的齐次性推出. 在经济上，这意味着利润与价格成正比.

2. 与 $e(p,u)$ 不同，$\pi(p)$ 未必是 p 的单调函数．因此，价格上涨（或下降）对于厂商最大利润的影响是不定的：这取决于其收益与成本何者变化更大．

3. **凸性** $\pi(p)$ 是凸函数．

证 设 $p,\bar{p} \gg 0, \alpha \in [0,1]$，则由式(3-6)有

$$
\begin{aligned}
\pi(\alpha p + \alpha' \bar{p}) &= \max_{y \in Y} (\alpha p + \alpha' \bar{p}) \cdot y \\
&\leqslant \max_{y \in Y} \alpha p \cdot y + \max_{y \in Y} \alpha' \bar{p} \cdot y \\
&= \alpha \pi(p) + \alpha' \pi(\bar{p}),
\end{aligned}
$$

这表明 $\pi(\cdot)$ 是凸函数． □

4. **连续性** 若 $y(\cdot)$ 是局部有界的，则 $\pi(\cdot)$ 是连续的．

证 这由式(3-7)及 $y(\cdot)$ 的上半连续性推出． □

5. **可微性**(Hotelling 引理) 设 $\bar{p} \gg 0$．则 $\pi(p)$ 在 $p = \bar{p}$ 处可微的充要条件是 $y(\bar{p})$ 仅含一点，此时有 $\nabla \pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$．

这是对偶定理(定理 2.3)的直接推论．

因此，若 $y(\cdot)$ 是单值函数，则成立恒等式

$$\nabla \pi(p) = y(p). \tag{3-9}$$

式(3-9)正好与恒等式 $\partial e(p,u)/\partial p = h(p,u)$（式(2-38)）相当．如同在 2.2.5 小节中一样，从式(3-9)进一步推出(对照式(2-41))

$$y'(p) = \frac{\partial y(p)}{\partial p} = \nabla^2 \pi(p), \tag{3-10}$$

只要 $y(\cdot)$ 是可微函数．因 $\pi(\cdot)$ 是凸函数，故由式(3-10)推出 $y'(p)$ 恒为正半定的对称矩阵，其作用恰与需求替代矩阵 $S(p,w) = \partial h(p,w)/\partial p$(式(2-41))相当，因而称为供应替代矩阵．由 $y'(p)$ 的正半定性特别推出

$$\partial y_l(p)/\partial p_l \geqslant 0 \quad (1 \leqslant l \leqslant L), \tag{3-11}$$

这意味着商品 l 的供应量与其价格正相关，在直观上这是很自然的．

至此，大体完成了关于供应函数与利润函数的一般讨论．所得

结论与需求理论有某种对应关系，但似乎并未达到同样的深度. 例如，并未给出 $\bar{y} \in y(p)$ 的微分条件，这显然是因为生产集 Y 不如预算集 $B_{p,w}$ 或效用约束集 $\{x : u(x) \geqslant u\}$ 那样有明确的结构. 对于下面考虑的单一产品情况能够弥补这一缺陷.

3.2.4 单一产品的情况

设 $f(\cdot) : \mathbf{R}_+^{L-1} \to \mathbf{R}_+$ 是给定的生产函数，假定它是连续的且 $f(0) = 0$；Y 是由式(3-2) 界定的生产集. 分别以 $p \in \mathbf{R}$ 与 $w \in \mathbf{R}^{L-1}$ 记产出 q 与投入 z 的价格. 对给定的 $(p,w) \gg 0$，PMP(3-5) 在现在的情况下应改写成

$$\begin{cases} \max\ (pq - w \cdot z) = \pi(p,w), \\ \text{s.t. } q \leqslant f(z), \quad z \in \mathbf{R}_+^{L-1}. \end{cases}$$

因已指明 PMP 的解必含于边界 ∂Y(参见 3.2.2 小节)，故可消去约束条件 $q \leqslant f(z)$，而直接以 $q = f(z)$ 代入目标函数. 这就将 PMP 转化成形式上较简单的问题，即

$$\max_{z \geqslant 0}[pf(z) - w \cdot z] = \pi(p,w). \qquad (3\text{-}12)$$

以 $z(p,w)$ 记问题(3-12) 的解之全体，则它是 (p,w) 的函数，称之为对生产要素的需求函数，而

$$y(p,w) = \{(-z, f(z)) : z \in z(p,w)\}$$

就是 3.2.1 小节中所说的供应函数，$\pi(p,w)$ 是利润函数.

$z(p,w)$ 与 $\pi(p,w)$ 的性质综合如下.

命题 3.1 函数 $z(p,w)$ 与 $\pi(p,w)$ 有以下性质.

1° 齐次性： $z(p,w)$ 与 $\pi(p,w)$ 分别为 0 次齐次与 1 次齐次函数.

2° 单调性： $\pi(p,w)$ 对 p 单调增，对 w 单调减.

3° 凸性与单值性： $\pi(p,w)$ 是凸函数；若 $f(\cdot)$ 为凹函数，则对固定的 $(p,w) \gg 0$，$z(p,w)$ 为凸集；若 $f(\cdot)$ 是严格凹函数，则 $z(p,w)$ 是 (p,w) 的单值函数.

4° 连续性： $z(p,w)$ 上半连续；若 $z(p,w)$ 局部有界，则

$\pi(p,w)$ 为连续函数.

5° 可微性： 若 $z(p,w)$ 是单值函数，则 $\pi(p,w)$ 可微且

$$\nabla\pi(p,w)=(f(z(p,w)),-z(p,w)). \tag{3-13}$$

以上命题的大多数结论是关于 $y(p)$ 与 $\pi(p)$ 的已知性质的推论；其余结论可由简单的推证得到.

对于问题(3-12)的主要兴趣是给出其微分条件，以下结果颇类似于定理 2.4.

定理 3.1 设 $f(\cdot)\in C^1,(p,w)\gg 0$.

1° 必要条件： 若 $\bar{z}\in z(p,w)$，则

$$p\nabla f(\bar{z})\leqslant w,\quad [p\nabla f(\bar{z})-w]\cdot\bar{z}=0; \tag{3-14}$$

当 $\bar{z}\gg 0$ 时 $p\nabla f(\bar{z})=w$.

2° 充分条件： 若 $f(\cdot)$ 为凹函数，$\bar{z}\gg 0$ 满足 $p\nabla f(\bar{z})=w$，则 $\bar{z}\in z(p,w)$.

证 1° 作 Lagrange 函数(参看定理 2.2 之证)

$$\mathscr{L}=pf(z)-w\cdot z+\mu\cdot z.$$

若 $\bar{z}$ 是问题(3-12)的解，则由 K-T 条件有 $\mu\in\mathbf{R}_+^{L-1}$，使得

$$\nabla\mathscr{L}(\bar{z})=p\nabla f(\bar{z})-w+\mu=0,\quad \mu\cdot\bar{z}=0.$$

这直接推出式(3-14). 若 $\bar{z}\gg 0$，则从 $\mu\cdot\bar{z}=0$ 与 $\mu\geqslant 0$ 推出 $\mu=0$，因而 $p\nabla f(\bar{z})=w$.

2° 任给 $z\in\mathbf{R}_+^{L-1}$，令 $h=z-\bar{z},\varphi(t)=f(\bar{z}+th)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$. 由 $f(\cdot)$ 为凹函数推出 $\varphi(\cdot)$ 为凹函数，因而 $\varphi'(\cdot)$ 单调减. 于是

$$\begin{aligned}
&[pf(z)-w\cdot z]-[pf(\bar{z})-w\cdot\bar{z}]\\
&=p[\varphi(1)-\varphi(0)]-w\cdot h\\
&=p\int_0^1\varphi'(t)\mathrm{d}t-w\cdot h\\
&\leqslant p\varphi'(0)-w\cdot h\\
&=p\nabla f(\bar{z})h-w\cdot h=0,
\end{aligned}$$

这正表明 $\bar{z}$ 是问题(3-12)的解. □

由定理 3.1 推出，若 $f(\cdot)$ 是凹函数，$\bar{z}\gg 0$，则 $\bar{z}\in z(p,w)$ 的

充要条件是 $p\nabla f(\bar{z}) = w$. 此条件显然推出

$$\frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_l}{\partial f(\bar{z})/\partial z_k} = \frac{w_l}{w_k} \quad (1 \leqslant l, k \leqslant L-1). \tag{3-15}$$

式(3-15)左端称为投入 l 与 k 之间的边际技术替代率,记作 MRTS_{lk}.

今将以上结论用到 Cobb-Douglas 生产函数(参看例 3.1).

例 3.2 取 $f(z) = z_1^\alpha z_2^\beta \quad (z \geqslant 0,\ \alpha, \beta > 0)$,则由式(3-15)得

$$\frac{\alpha z_2}{\beta z_1} = \frac{w_1}{w_2} \tag{3-16}$$

(对照例 2.1). 设 $\alpha + \beta < 1$,则从式(3-16) 与 $p\partial f(z)/\partial z_1 = w_1$ 一起惟一地解出

$$\begin{cases} z(p,w) = (z_1, z_2) = \left(\dfrac{\tau\alpha}{w_1}, \dfrac{\tau\beta}{w_2}\right), \\ \tau = \left(\dfrac{p\alpha^\alpha\beta^\beta}{w_1^\alpha w_2^\beta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}. \end{cases} \tag{3-17}$$

以 $z = z(p,w)$ 代入 $\pi(p,w) = pf(z) - w \cdot z$ 得

$$\pi(p,w) = \tau(1 - \alpha - \beta). \tag{3-18}$$

用式(3-17)、(3-18)不难直接验证, $z(p,w)$ 与 $\pi(p,w)$ 具有如命题 3.1 所述的性质.

若 $\alpha + \beta = 1$,则由式(3-16) 消去 z_2,将问题(3-12) 化为

$$\max_{z_1 \geqslant 0} A z_1 = \pi(p,w), \tag{3-19}$$

其中

$$A = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^\beta (p - \theta), \quad \theta = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^\beta.$$

若 $\theta < p$,则 $A > 0$,问题(3-19) 显然无解,因而 $z(p,w) = \varnothing$;若 $\theta = p$,则 $A = 0$,任何 $z_1 \geqslant 0$ 都是问题(3-19) 的解,因而

$$z(p,w) = \left\{\left(z_1, \frac{\beta w_1}{\alpha w_2} z_1\right) : z_1 \geqslant 0\right\}, \quad \pi(p,w) = 0.$$

若 $\theta > p$,则 $A < 0$,问题(3-19) 以 $z_1 = 0$ 为惟一解,因而 $z(p,w) = 0, \pi(p,w) = 0$.

若 $\alpha+\beta>1$，则问题(3-12) 无解.

3.2.5 总供应

从字面上看，总供应问题与总需求问题(参见 2.4 节) 恰相对应. 在 2.4 节中我们看到，财富分配选择的多样性使总需求问题复杂化了. 至于总供应，则不存在财富分配的问题，因而具有一个更简单的理论，以至只要一个短短的小节，就足以概述有关的主要结果.

设一经济中有 J 个厂商，J 大到使任何单个厂商都无力控制或影响商品的市场价格. 厂商 $j(1\leqslant j\leqslant J)$ 的生产集、供应函数与利润函数分别记作 $Y_j, y_j(p)$ 与 $\pi_j(p)$. 纯粹从数学上加总得到

$$\begin{cases} Y=\sum_j Y_j=\left\{\sum_j y_j : y_j\in Y_j \quad (1\leqslant j\leqslant J)\right\}; \\ y(p)=\sum_j y_j(p), \quad \pi(p)=\sum_j \pi_j(p). \end{cases} \tag{3-20}$$

$Y, y(p)$ 与 $\pi(p)$ 分别称为总生产集、总供应函数与总利润函数. 一个关键的事实是，如同个体供应函数与个体利润函数一样，总供应函数与总利润函数也满足等式(2-6)、(2-7)：

$$\begin{aligned} \pi(p) &= \sum_j \max_{y_j\in Y_j} p\cdot y_j \\ &= \max_{y_j\in Y_j, 1\leqslant j\leqslant J} \sum_j p\cdot y_j \\ &= \max_{y\in Y} p\cdot y; \\ p\cdot y(p) &= \sum_j p\cdot y_j(p) \\ &= \sum_j \pi_j(p)=\pi(p). \end{aligned}$$

这就表明，对于任何给定的 $p\gg 0, y(p)$ 与 $\pi(p)$ 分别为最大化问题

$$\max_{y\in Y} p\cdot y=\pi(p)$$

的解集与最优值. 因此，若虚拟一个以 Y 为生产集的生产者，他以

追求最大利润为目标，那么 $y(p)$ 与 $\pi(p)$ 即分别为他的最优生产计划与最优利润. 我们不妨称这个虚拟的生产者为代表生产者.

既然代表生产者依据利润最大化原则所进行的选择形式上与单个厂商没有区别，那么，在 3.2.2 与 3.2.3 小节中建立的所有结论同样适用于总供应与总利润函数. 这就表明，个体供应函数与个体利润函数的所有性质都不会因加总而失去. 实际上，通过加总还可能获得更好的性质. 例如，即使 Y_j 不都是凸集，Y 仍可能是凸集. 当 J 很大时，每个 Y_j 不免常有的不规则性，在加总过程中因相互抵消而被修正，因而往往使 Y 具有更大的规则性.

3.3 成本最小化

厂商行为可用一种对偶的方式来刻画：成本最小化. 因此，本节与上节的关系，恰如 2.2 与 2.1 节的关系. 为简单起见，以下限于考虑单一产品的情况. 给定生产函数 $f: \mathbf{R}_+^{L-1} \to \mathbf{R}_+$，假定它连续、无局部极大值点且 $f(0)=0$.

3.3.1 成本最小化问题

在 3.2.4 小节中，厂商的行为被描述成：选择投入 z，最大化其利润 $\pi = pf(z) - w \cdot z$. 现在换一个角度：厂商选择投入 z，使得在产出 $f(z) \geqslant q$ 的条件下最小化其成本 $c = w \cdot z$. 在数学上，这意味着对给定的 $(w,q) \gg 0$，解如下的成本最小化问题 (CMP)

$$\begin{cases} \min w \cdot z = c(w,q), \\ \text{s.t. } f(z) \geqslant q, \quad z \in \mathbf{R}_+^{L-1}. \end{cases} \tag{3-21}$$

问题(3-21)中的 $c(w,q)$ 表最小成本，即

$$c(w,q) = \min_{f(z) \geqslant q} w \cdot z, \tag{3-22}$$

称它为成本函数. 以 $z(w,q)$ 记 CMP (3-21) 的解之全体，它是 (w,q) 的函数(可能是多值函数)，称为条件要素需求函数，"条件"一词意指问题(3-21) 服从约束条件 $f(z) \geqslant q$；要素则指投入的商

品.

如果将问题(3-21)与问题(2-15)对照一下,那么读者会立即发现,就数学形式而言,两者竟无任何区别!所不同的只是记号与经济含义而已.只要分别以 $f(z)$,$z(w,q)$ 与 $c(w,q)$ 取代2.2节中的 $u(x)$,$h(p,u)$ 与 $e(p,u)$,就可以直接应用2.2节中的结论,得出函数 $z(w,q)$ 与 $c(w,q)$ 的以下性质(总设 $(w,q)\gg 0$):

1. 齐次性 $z(w,q)$ 与 $c(w,q)$ 对 w 分别为0次与1次齐次函数.

2. 单调性 $c(w,q)$ 对 w 单调增,对 q 严格单调增.

3. 凸凹性与单值性 若 $f(\cdot)$ 是拟凹函数,则对给定的 $(w,q)\gg 0$,$z(w,q)$ 是一凸集;若 $f(\cdot)$ 是强拟凹函数,则 $z(w,q)$ 是单值函数;$c(w,q)$ 对 w 是凹函数;若 $f(\cdot)$ 是凹函数,则 $c(w,q)$ 对 q 是凸函数.

4. 连续性 $z(w,q)$ 上半连续,当它为单值函数时在通常意义下连续;$c(w,q)$ 是连续函数.

5. 可微性(Shephard 引理) 若 $z(w,q)$ 是单值函数,则 $c(w,q)$ 对 w 可微,且

$$\frac{\partial c(w,q)}{\partial w}=z(w,q). \tag{3-23}$$

因此,若 $z(w,q)$ 对 w 可微,则

$$\frac{\partial z(w,q)}{\partial w}=\nabla_w^2 c(w,q); \tag{3-24}$$

于是 $\partial z(w,q)/\partial w$ 是负半定的对称矩阵.

6. 微分条件 设 $f(\cdot)\in C^1$. 若 $\bar{z}\in z(w,q)$,则存在 $\lambda>0$,使得

$$\lambda\nabla f(\bar{z})\leqslant w,\quad [\lambda\nabla f(\bar{z})-w]\cdot\bar{z}=0; \tag{3-25}$$

当 $\bar{z}\gg 0$ 时 $\lambda\nabla f(\bar{z})=w$. 反之,若 $\bar{z}\in \mathbf{R}_+^{L-1}$ 满足

$$f(\bar{z})=q,\quad w=\lambda\nabla f(\bar{z}), \tag{3-26}$$

且 $f(\cdot)$ 是拟凹函数,则 $\bar{z}\in z(w,q)$.

将条件(3-26)与定理 3.1 中的条件 $w = p\nabla f(\bar{z})$ 比较看出 $\lambda = p$.

如同定理 2.4(或定理 2.2)一样,微分条件(3-26)亦有明显的几何解释. $\mathbf{R}_+^{L-1}$ 中的超曲面 $f(z) = \text{const}$ 称为等产量曲面(当 $L = 3$ 时就是等产量曲线). 条件(3-26)表示,成本最小化(也是利润最大化)投入 $\bar{z}$ 在等产量曲面 $f(z) = q$ 上,且 w 是等产量曲面在该点的法向量.

若在问题(3-21)中取 $f(z) = z_1^\alpha z_2^\beta \quad (\alpha,\beta > 0)$, 则直接由式(2-26)、(2-27)得出

$$\begin{cases} z(w,q) = \tau(\alpha/w_1,\beta/w_2), \quad c(w,q) = \tau(\alpha+\beta); \\ \tau = \left(\dfrac{q w_1^\alpha w_2^\beta}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right)^{1/(\alpha+\beta)}. \end{cases} \tag{3-27}$$

值得注意的是,式(3-27)适用于任何 $\alpha,\beta > 0$;而在例 3.2 中,当 $\alpha + \beta > 1$(或对 $\alpha + \beta = 1$ 的某些情况)时,利润最大化问题无解. 这就表明,不同于 UMP 与 EMP 之间的关系,PMP 与 CMP 之间的对偶是不完全的. 由于 CMP 通常有解,运用函数 $z(w,q)$, $c(w,q)$ 往往比 $z(p,w)$, $\pi(p,w)$ 更为方便.

3.3.2 相关的最大化问题

以下两个最大化问题与成本最小化问题密切相关.

1. 产出最大化问题(OMP)

设 $w \gg 0$ 与 $k > 0$ 分别为投入的价格与厂商的资本. 厂商选择投入 $z \in \mathbf{R}_+^{L-1}$, 使之满足预算约束 $w \cdot z \leqslant k$, 且使产出 $q = f(z)$ 达到最大, 即解如下的最大化问题

$$\begin{cases} \max f(z) = q(w,k), \\ \text{s.t. } w \cdot z \leqslant k, \quad z \in \mathbf{R}_+^{L-1}. \end{cases} \tag{3-28}$$

问题(3-28)正是问题(3-21)的对偶问题,两者的关系恰如效用最大化问题与支出最小化问题的关系. 而且,问题(3-28)的数学形式与效用最大化问题完全一样,因而可将 2.1 节中关于函数 $x(p,$

$w)$，$v(p,w)$ 的所有结果直接应用于问题(3-28) 的解 $z(w,k)$(最优投入) 与值函数 $q(w,k)$(最大产出).

2. 利润最大化问题

设 $\pi(p,w)$ 依式(3-12)，则

$$\begin{aligned}\pi(p,w) &= \sup\{pq - w\cdot z : f(z)\geqslant q, z\geqslant 0\}\\ &= \sup_{q\geqslant 0}\sup_{f(z)\geqslant q}(pq - w\cdot z)\\ &= \sup_{q\geqslant 0}(pq - \inf_{f(z)\geqslant q} w\cdot z)\\ &= \sup_{q\geqslant 0}[pq - c(w,q)]. \qquad (\text{用式(3-22)})\end{aligned}$$

这就可将利润最大化问题(式(3-12))重建如下

$$\max_{q\geqslant 0}[pq - c(w,q)] = \pi(p,w). \tag{3-29}$$

问题(3-29)的好处在于，它的目标函数是一个一元函数，因而其微分条件极为简单. 下面设 $c(w,q)$ 对 q 为 C^1 类函数. 若 $\bar{q}$ 是问题(3-29) 的解，则

$$p\leqslant \frac{\partial c(w,\bar{q})}{\partial q},\quad \text{当 } \bar{q}>0 \text{ 时等号成立}. \tag{3-30}$$

反之，若条件(3-30)满足，$f(\cdot)$ 是凹函数，从而 $pq - c(w,q)$ 对 q 是凹函数，则 $\bar{q}$ 为问题(3-29) 的解.

设 $\alpha+\beta<1$，$c(w,q)$ 依式(3-27)，则由 $p=\partial c(w,q)/\partial q$ 得

$$p=\tau/q,\quad \tau=\left(\frac{qw_1^{\alpha}w_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right)^{1/(\alpha+\beta)}.$$

由此解出

$$\begin{cases} q=\left(\dfrac{p^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{w_1^{\alpha}w_2^{\beta}}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)},\\ \tau=pq=\left(\dfrac{p\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{w_1^{\alpha}w_2^{\beta}}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}.\end{cases} \tag{3-31}$$

$$\begin{aligned}\pi(p,w) &= pq - c(w,q)\\ &= \tau - \tau(\alpha+\beta) = \tau(1-\alpha-\beta),\end{aligned}$$

这就重新得到了式(3-17)、(3-18).

3.3.3 成本函数

让我们专门考察一下成本函数 $c(w,q)$（见式(3-22)）. 因厂商不能选择要素价格 w，故考察的重点是成本 c 与产出水平 q 的关系. 为突出这一点，不妨设仅有一种投入（可理解为复合投入或资本投入），且其价格为 1；然后令 $C(q)=c(1,q)$. 因 $w=1$，故投入 z 与成本一致，即 $z=C(q)$. 另一方面，产出 $q=f(z)$. 这就表明，$C(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$ 互为反函数，因而成本函数可从生产函数得到完全的说明，反之亦然. 这一事实对于下面的分析是关键的.

依据传统的记号，令

$$\mathrm{AC}=C(q)/q,\quad \mathrm{AP}=f(z)/z; \tag{3-32}$$

$$\mathrm{MC}=C'(q),\quad \mathrm{MP}=f'(z). \tag{3-33}$$

它们依次称为平均成本、平均产量、边际成本、边际产量. 利用 $C(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$ 互为反函数这一事实，从式(3-32)、(3-33)推出

$$\mathrm{AC}=1/\mathrm{AP},\quad \mathrm{MC}=1/\mathrm{MP}. \tag{3-34}$$

微分等式 $q\cdot\mathrm{AC}=C(q)$ 得

$$\mathrm{AC}+q\frac{\mathrm{d(AC)}}{\mathrm{d}q}=\mathrm{MC}.$$

对于 AP，MP 亦有类似结果. 这就得到

$$\begin{cases}\mathrm{AC}=\mathrm{MC}\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d(AC)}}{\mathrm{d}q}=0;\\[2ex] \mathrm{AP}=\mathrm{MP}\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d(AP)}}{\mathrm{d}z}=0.\end{cases} \tag{3-35}$$

利用这些结果，可得到投入产出关系的清晰的几何图像.

首先，在 z-q 平面上绘出产量曲线 $q=f(z)$，如图 3-2 所示的产量曲线一般可分为 4 段：无产出段 $0\leqslant z\leqslant z_0$：$f(z)=0$，仅当投入 z 越过启动值 z_0，才开始有产出；加速增长段 $z_0<z<z_1$：$f'(z)>0$，$f''(z)>0$，z_1 对应边际产量曲线 MP 的顶点；减速增长段 $z_1<z<z_2$：$f'(z)>0$，$f''(z)<0$，z_2 对应产量曲线的顶点，$q_2=f(z_2)$ 是增长极限；下降阶段 $z>z_2$：$f'(z)<0$，必有 $\bar{z}\in(z_1,z_2)$，

当 $z=\bar{z}$ 时平均产量曲线 AP 达到顶点. 由式(3-35) 推出在 $z=\bar{z}$ 时 AP = MP, 即 AP 曲线与 MP 曲线在 AP 曲线的顶点处相交. 通常假定生产函数满足 $f'(\cdot)>0, f''(\cdot)<0$(单调增的凹函数), 这意味着限于区间 (z_1,z_2) 内考虑 $f(z)$.

作为 $f(\cdot)$ 的反函数, 成本函数 $C(\cdot)$ 定义在 $[0,q_2]$ 上, 其中 $q_i=f(z_i), i=0,1,2$. 在 q-z 平面上绘出成本曲线, 如图 3-3 所示, 它

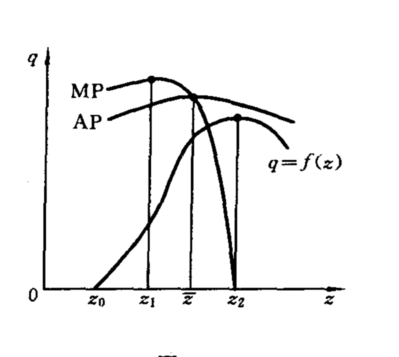


图 3-2

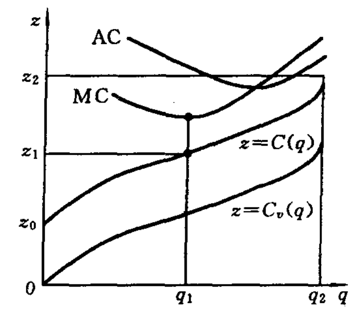


图 3-3

是产量曲线关于直线 $z=q$ 的镜像. 在区间 $(0,q_1)$ 内, $C'(\cdot)>0$, $C''(\cdot)<0$, $q=q_1$ 时 MC 曲线达到最低点; 在 (q_1,q_2) 内, $C'(\cdot)>0$, $C''(\cdot)>0$, 在这一段上表现了成本曲线的典型特性. $\bar{q}=f(\bar{z})\in(q_1,q_2)$, 当 $q=\bar{q}$ 时 MC 曲线与 AC 曲线相交, 且 AC 曲线达到最低点(平均成本最低), 通常称 $\bar{q}$ 为有效生产规模. $z_0=C(0)$ 称为固定成本,

$$C_v(q)\triangleq C(q)-z_0$$

称为可变成本. 可变成本曲线是成本曲线平行下移的结果.

由定理 3.1(取 $w=1$), 有 $pf'(z)=1$, 因而 $p=C'(q)$, p 是产品价格. 这给出在利润最大化条件下产出 q 与价格 p 之间的关系, 称之为供应曲线. 若在图 3-3 中 z 轴同时当做 p 轴, 则曲线 $p=C'(q)$ 与 MC 曲线正好重合. 可见供应曲线典型地($q_1<q<q_2$)表现出单调增的特性.

第四章　均衡理论

在前两章中，我们通过对消费者与生产者个体选择行为的考察，分别建立了需求理论与生产理论. 这两个理论的引人之处在于，它们都是从极少的假定(如偏好公理、生产集的凸性假设等)出发，完全严格地推导出需求与供应等的变动规律. 然而，这两个理论却留下了一个似乎不引人注目但显然是致命的缺陷：它们都依赖于那个作为独立变量给定的价格向量 p，p 如何确定的问题完全被搁置一旁. 而只要 p 不确定，对需求与供应就不可能作任何确定的预测. 人们直觉地认定 p 由市场本身决定，本章则要确切地描述 p 由之决定的条件与机制. 简单地说，p 决定于市场的某种均衡，这种均衡是处于竞争状态的所有个体相互作用的结果. 均衡理论必然同时考虑到经济的各个方面(消费与生产)与各个参与者(消费者与厂商)，因而要综合大量的信息，远不是一件轻而易举的事情. 本章只能是这一宏大理论的最基本的部分.

4.1　均衡与最优配置

4.1.1　均衡概念

直觉经验能模糊地告诉我们，市场或经济意味着什么. 但这种印象不足以用于理论分析. 我们需要一个完全形式的描述. 设一经济中有 I 个消费者、J 个厂商与 L 种商品. 消费者 $i(1\leqslant i\leqslant I)$) 的消费集、偏好、需求函数与初始资源(即所谓禀赋) 分别记为 X_i, $\succcurlyeq_i$, $x_i(\cdot,\cdot)$ 与 ω_i，其中 $X_i\subset\mathbf{R}^L$, $\omega_i\in\mathbf{R}^L$,

$$x_i(p,w)=\{x_i\in B_{p,w}:x_i\succcurlyeq_i x_i'(\forall\ x_i'\in B_{p,w})\}$$

的定义不必用到 $\succcurlyeq_i$ 的效用表示(参见式(2-6)). 厂商 $j(1 \leqslant j \leqslant J)$ 的生产集与供应函数分别记为 Y_j 与 $y_j(\cdot)$(参见3.2.5小节),假定 $Y_j \subset \mathbf{R}^L$ 是非空闭集. 如上的对象所构成的系统

$$(\{X_i, \succcurlyeq_i, \omega_i\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J)$$

就称为一个市场或一个经济,其中的消费者与厂商统称为交易者或经济人. 约定 $\overline{\omega} = \sum \omega_i$(总的禀赋).

从纯形式的角度说,对于一个市场我们要交代的大体上就是如此,这无疑使人觉得未免过于简单化了. 在我们的直觉中,市场要丰富得多. 但市场的许多的属性要么会妨碍一个可行的分析而被舍弃,要么过于复杂而难以严格描述. 本书既然以数理分析为目标,对于基本的理论框架只能容许一个最低限度的非形式刻画. 对于现在要描述的市场,尤其如此.

我们说所讨论的市场是完全市场,意味着它具有以下属性.

(1) 分散化:初始资源与厂商的所有权分散于诸消费者,每个消费者 i 占有初始资源 ω_i 与厂商 j 的份额 θ_{ij}, $\sum_i \theta_{ij} = 1$;后者意味着每个厂商的股权分散于各消费者.

(2) 竞争性:所有交易者都是市场价格的接受者,没有人具有制定或影响价格的市场力.

(3) 完全信息:交易双方对于交易的商品具有同等的完全信息.

至于以上条件是否为一个现实的市场所具备,则不是此处所要讨论的问题. 我们关心的只是:一旦承认这些前提,必定得接受哪些结论?在回答这一问题之前,必须准备一些适当的概念.

首先约定在本章通用的以下记号:给定一个配置 (x,y),意味着

$$x = (x_1, \cdots, x_I), \quad y = (y_1, \cdots, y_J),$$

其中,$x_i \in X_i, y_j \in Y_j (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$. 若配置 (x,y) 满足如下的市场出清条件(供需平衡)

$$\sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j \tag{4-1}$$

则称 (x,y) 为一个可行配置. 以 A 记可行配置之全体①. 现在的问题是:哪些可行配置具有某种优势或更可能成为市场选择的结局? 与此有关的是以下定义.

定义 4.1 若 $p \in \mathbf{R}^L$ 与$(x^*,y^*) \in A$ 满足以下条件:

1° $y_j^* \in y_j(p) \quad (1 \leqslant j \leqslant J)$;

2° $x_i^* \in x_i(p, p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*) \quad (1 \leqslant i \leqslant I)$,

则称(x^*,y^*,p) 为一个 Walras 均衡或竞争均衡.

其次,引入条件 2° 的修正:

2°′ 存在财富分配规则 $\sum_i w_i = p \cdot \left(\overline{\omega} + \sum_j y_j^*\right)$,使得 $x_i^* \in x_i(p,w_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant I)$.

2°″ 存在财富分配规则 $\sum_i w_i = p \cdot \left(\overline{\omega} + \sum_j y_j^*\right)$,使得 $\forall\, i \in I, \forall\, x_i \in X_i : p \cdot x_i < w_i \Rightarrow x_i^* \succcurlyeq_i x_i$.

当条件 1°、2°′ 与 1°、2°″ 满足时,分别称(x^*,y^*,p) 为带转移均衡与带转移拟均衡. 对于以上 3 种意义下的均衡,(x^*,y^*) 与 p 分别称为均衡配置与均衡价格.

若可行配置(x,y) 与(x',y') 满足条件

$$x_i' \succcurlyeq_i x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant I), \text{至少有一个 } i \in I : x_i' \succ_i x_i, \tag{4-2}$$

则说 (x',y') 是(x,y) 的 Pareto 改进. 若不存在对 $(x,y) \in A$ 的 Pareto 改进,则称 (x,y) 为 Pareto 最优配置或 Pareto 有效配置. 这种 Pareto 最优配置之全体称为 Pareto 集.

直接看出,Walras 均衡必然是带转移均衡;而带转移均衡必然是带转移拟均衡. 至于均衡配置与 Pareto 最优配置的关系,初看起来就不那么清楚. 它们都具有依偏好 $\succcurlyeq_i$ 的某种优势,这是共同之处. 但两者的差别是很明显的:Pareto 最优性完全不涉及价格

---

① 这只是为本节叙述方便而设定的临时记号.

与消费者的财富，因而也不涉及市场交易，它是对配置本身的一种纯福利评价. 而且，Pareto 最优性是一种整体性质：它指出一个配置 (x,y) 从整体上说不能再改进，而单个 x_i 对于个体 i 完全可能不是最优的. 与此相反，均衡(无论哪一种)同时保证了所有个体在一定约束下的最优选择；至于它是否同时也是整体最优的，则有待判断，这不是均衡概念本身所要求的.

尽管均衡与 Pareto 最优概念如此明显地不同，令人惊异的是，两者之间竟然存在某种必然联系，这就是下面的基本定理所要揭示的.

4.1.2 基本福利定理

首先给出比较简单的第一基本福利定理.

命题 4.1 设偏好 $\succcurlyeq_i$ 都是局部非饱和的，(x^*,y^*,p) 是一个带转移均衡，则 (x^*,y^*) 是 Pareto 最优配置.

证 设 (x,y) 是 (x^*,y^*) 的一个 Pareto 改进，今由此导出矛盾. 取定定义 4.1 条件 $2^{\circ\prime}$ 中的财富分配 $\{w_i\}$. 因 $x_i^* \in x_i(p,w_i)$，故当 $x_i \succ_i x_i^*$ 时必 $p\cdot x_i > w_i$. 若 $x_i \succcurlyeq_i x_i^*$，则由 $\succcurlyeq_i$ 的局部非饱和性，有充分接近 x_i 的 $x_i' \in X_i$，使 $x_i' \succ_i x_i^*$，从而 $p\cdot x_i' > w_i$. 这推出 $p\cdot x_i \geqslant w_i$. 于是

$$\begin{aligned} p\cdot \sum_i x_i &= \sum_i p\cdot x_i > \sum_i w_i \\ &= p\cdot\Big(\overline{\omega} + \sum_j y_j^*\Big) \\ &\geqslant p\cdot\Big(\overline{\omega} + \sum_j y_j\Big), \end{aligned}$$

但这与 (x,y) 满足条件(4-1)相矛盾. □

简单地说，命题 4.1 断言：均衡配置是 Pareto 最优配置. 这就意味着，无论社会成员如何各自追求一己之最优，其结局竟然是整体的或社会的最优！这岂不是证明了 Adam Smith 的著名论断：市场以它那只看不见的手，能使所有的人都得到满足. 这应当使市场

经济的信奉者们深感满意. 然而,下述理由将会使你的评价有所保留. 首先,定理所要求的市场的完全性已过于理想化了. 其次, Pareto 最优远谈不上是社会福利的理想结局. 你只要想想:将全部社会资源集中于一人的配置也可能是 Pareto 最优的!

现在转向更困难的第二基本福利定理,它在一定意义上是第一定理的逆定理.

定理 4.1 设 X_i, Y_j 皆为凸集,偏好 $\succcurlyeq_i$ 是局部非饱和的、凸性的, $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$; (x^*, y^*) 是一 Pareto 最优配置. 则存在 $0 \neq p \in \mathbf{R}^L$, 使 (x^*, y^*, p) 是带转移拟均衡; 当 $0 \in X_i$, $\succcurlyeq_i$ 连续, $p \cdot x_i^* > 0 (1 \leqslant i \leqslant I)$ 时, (x^*, y^*, p) 是带转移均衡.

证 1° 确定均衡价格 p, 这是关键性的一步. 令

$$V_i = \{x \in X_i : x_i \succ_i x_i^*\} \quad (1 \leqslant i \leqslant I),$$

$V = \sum V_i$, $Y = \sum Y_j$, 则 V, Y 为非空凸集. 由 (x^*, y^*) 的 Pareto 最优性推出 $V \cap (\bar{\omega} + Y) = \varnothing$(请验证!). 由分离定理(参见文献[4]Th. 1.1.2), 有 $0 \neq p \in \mathbf{R}^L$ 与 $r \in \mathbf{R}$, 使得

$$p \cdot x \geqslant r \geqslant p \cdot (\bar{\omega} + y) \quad (\forall\, x \in V, y \in Y). \tag{4-3}$$

令 $w_i = p \cdot x_i^* (1 \leqslant i \leqslant I)$, 则由 $\sum x_i^* = \bar{\omega} + \sum y_j^*$ 推出

$$\sum_i w_i = \sum_i p \cdot x_i^* = p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_j y_j^*\right). \tag{4-4}$$

下面只需验证 (x^*, y^*, p) 满足定义 4.1 中条件 1°、2°″(用上述的 w_i).

2° 验证条件 1°. 结合式(4-3)与式(4-4)有

$$\sum_i w_i \leqslant r \leqslant p \cdot \sum_i x_i^* = \sum_i w_i,$$

这推出 $\sum w_i = r$. 固定 $j \in J$, $\forall\, y_j \in Y_j$, 由式(4-3) 有

$$p \cdot \left(\bar{\omega} + y_j + \sum_{k \neq j} y_k^*\right) \leqslant r = p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_k y_k^*\right),$$

这推出 $p \cdot y_j \leqslant p \cdot y_j^*$. 因此 $y_j^* \in y_j(p)$.

3° 验证条件 2°″. 固定 $i \in I$, 设 $x_i \in X_i$, $x_i \succ_i x_i^*$. 取 $x_k \in V_k (k \neq i)$, 则由式(4-3) 有

$$p \cdot \sum_k x_i \geqslant r = w_i + \sum_{k \neq i} p \cdot x_i^* .$$

由局部非饱和性，可令 $x_k \to x_k^* \ (k \neq i)$，因而得出 $p \cdot x_i \geqslant w_i$.

4° 设 $0 \in X_i$，$\succcurlyeq_i$ 连续，$w_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant I)$，验证条件 2°′. 固定 $i \in I$，设 $x_i \in X_i$，$p \cdot x_i \leqslant w_i$. 则当 $0 < \alpha < 1$ 时有 $p \cdot (\alpha x_i) < w_i$，于是由第 3° 步所证有 $x_i^* \succcurlyeq_i \alpha x_i$. 令 $\alpha \to 1$ 得 $x_i^* \succcurlyeq_i x_i$，故 $x_i^* \in x_i(p, w_i)$. □

简单地说，定理 4.1 断言，通过适当重新分配财富，任何 Pareto 最优配置都可能成为均衡配置. 如此深刻的结论可能让你更为惊异. 不过如同对第一基本定理一样，对第二基本定理亦不应期望过高. 首先，定理断言存在的均衡价格 p 的实现，远不是确定无疑的事情. 更成问题的是，有什么社会力量足以胜任财富的重新分配？即使存在具有足够权威的经济计划者，他会有足够的信息用以准确决定定理 4.1 中的 p 与 w_i 吗？看来，定理的主要价值，在于它确立了一种逻辑上的潜在可能性而已.

4.1.3 最优配置问题

设每个 $\succcurlyeq_i$ 有连续效用表示 $u_i(\cdot)(1 \leqslant i \leqslant I)$，则条件(4-2)相当于

$$u_i(x_i') \geqslant u_i(x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ 且对某个 } i \text{ 为严格不等式.} \tag{4-2a)'$$

于是，求最优配置的问题归结为解向量最优化问题(参见文献[4] §6.1)

$$\begin{cases} \max(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_I(x_I)), \\ \text{s.t. } \sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j, \\ \qquad x_i \in X_i, \quad y_i \in Y_j \quad (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J). \end{cases} \tag{4-5}$$

问题(4-5)的约束条件恰好指明 (x,y) 为可行配置，而 (x,y) 是 Pareto 最优配置则相当于 (x,y) 是问题(4-5)的 Pareto 最优解或

有效解. 这样,我们就可以充分运用向量最优化(或等价地,多目标规划)理论中的结论与方法.

现在引进一个与问题(4-5)密切相关的集 $U \subset \mathbf{R}^I$. 约定

$$u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_I(x_I));$$

以 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_I) \in \mathbf{R}^I$ 记一组个体效用. 称

$$U \triangleq \{u \in \mathbf{R}^I : \exists\ (x,y) \in A, u \leqslant u(x)\} \qquad (4\text{-}6)$$

为效用可能性集. 以 $\max U$ 记 U 依向量序 $\geqslant$ 的极大元之全体,即

$$\max U = \{u \in U:\ \text{不存在}\ u' \in U\ \text{使}\ u' > u\}. \qquad (4\text{-}7)$$

直观上, $\max U$ 位于 U 的右上方边界上,一般构成边界 ∂U 的一部分,称为 U 的 Pareto 边界.

命题 4.2 1° $(x,y) \in A$ 是 Pareto 最优配置 $\Leftrightarrow u(x) \in \max U$.

2° 若 X_i, Y_j 皆为凸集, $u_i(\cdot)$ 是凹函数 $(1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$, 则 U 是凸集.

证 1° 只要注意, $\forall\ (x,y) \in A$, 有 $u(x) \in U$; 而由条件(4-2)与条件(4-2)′, (x',y') 是 (x,y) 的 Pareto 改进 $\Leftrightarrow u(x') > u(x)$.

2° 设 $u^1, u^2 \in U, \alpha \in [0,1]$, 则有 $(x^k, y^k) \in A$, 使 $u^k \leqslant u(x^k)$, $k = 1,2$. 令 $\bar{x} = \alpha x^1 + \alpha' x^2, \bar{y} = \alpha y^1 + \alpha' y^2$, 由 X_i, Y_j 为凸集易见 $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. 由

$$\begin{aligned}\alpha u^1 + \alpha' u^2 &= (\alpha u_1^1 + \alpha' u_1^2, \cdots, \alpha u_I^1 + \alpha' u_I^2) \\ &\leqslant (\alpha u_1(x_1^1) + \alpha' u_1(x_1^2), \cdots, \alpha u_I(x_I^1) + \alpha' u_I(x_I^2)) \\ &\leqslant (u_1(\alpha x_1^1 + \alpha' x_1^2), \cdots, u_I(\alpha x_I^1 + \alpha' x_I^2)) \\ &= u(\bar{x})\end{aligned}$$

知 $\alpha u^1 + \alpha' u^2 \in U$, 故 U 是凸集. □

现在考虑联系于问题(4-5)的单目标最大化问题

$$\max\ \rho \cdot u(x), \quad \text{s.t.}\ (x,y) \in A, \qquad (4\text{-}7\text{a})$$

其中, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_I) \in \mathbf{R}^I$. 为简便起见,将约束条件缩写成了 $(x,y) \in A$. 从向量最优化理论知(参看文献[4] § 6.1), 若存在 ρ

$\gg 0$，使(x^*, y^*)是问题(4-7a)的解，则(x^*, y^*)必为问题(4-5)的有效解，因而是 Pareto 最优配置. 反之，若(x^*, y^*)是 Pareto 最优配置，U是闭凸集，则必存在$\rho \gg 0$，使(x^*, y^*)是问题(4-7a)的解. 由命题 4.2，U的凸性由X_i, Y_i凸、$u_i(\cdot)$为凹函数$(1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$保证；在典型的情况下，$U$是闭集. 因此，若认定$U$为闭凸集，则求 Pareto 最优配置的问题，完全转化为解最大化问题(4-7a). 注意(4-7a)中的目标函数$\rho \cdot u(x) = \sum \rho_i u_i(x_i)$可看作一个社会效用函数(或社会福利函数). 这就使得 Pareto 最优配置被赋予了某种最优社会效用的含义.

4.1.4 微分条件

今对问题(4-7a)应用 K-T 条件. 为此，必须将其约束条件具体化. 以下设$X_i = \mathbf{R}_+^L$，$u_i(\cdot) \in C^1$，$u_i(0) = 0$，$\nabla u_i(\cdot) \gg 0 (1 \leqslant i \leqslant I)$；

$$Y_j = \{y \in \mathbf{R}^L : F_j(y) \leqslant 0\},$$

其中$F_j(\cdot) \in C^1$，$F_j(0) \leqslant 0$，$\nabla F_j(\cdot) \gg 0 (1 \leqslant j \leqslant J)$. 于是问题(4-7a)可改写成

$$\begin{cases} \max \sum_i \rho_i u_i(x_i), \\ \text{s.t.} \sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j, \\ \quad x_i \geqslant 0, F_j(y_j) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J). \end{cases} \tag{4-8}$$

作 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = \sum_i \rho_i u_i(x_i) + \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_j \lambda_j F_j(y_j) - \mu \cdot \Big(\sum_i x_i - \bar{\omega} - \sum_j y_j \Big),$$

其中$k_i \in \mathbf{R}_+^L (1 \leqslant i \leqslant I)$，$\lambda_j \geqslant 0 (1 \leqslant j \leqslant J)$，$\mu \in \mathbf{R}^L$. 由最优化理论，关于问题(4-8)的 K-T 条件是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_i}=\rho_i\nabla u_i(x_i)+k_i-\mu=0 & (1\leqslant i\leqslant I),\\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial y_j}=-\lambda_j\nabla F_j(y_j)+\mu=0 & (1\leqslant j\leqslant J),\\ k_i\cdot x_i=\lambda_j F_j(y_j)=0 & (1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J),\end{cases}\tag{4-9}$$

其中 $(x,y)\in A$. 若限定 $x\gg 0$,则从式(4-9) 得 $k_i=0(1\leqslant i\leqslant I)$. 于是从式(4-9) 推出

$$\rho_i\nabla u_i(x_i)=\lambda_j\nabla F_j(y_j)\quad(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J).\tag{4-10}$$

因 $\rho_i>0,\nabla u_i(\cdot)\gg 0$,故必 $\lambda_j>0,F_j(y_j)=0$,向量

$$\nabla u_i(x_i),\nabla F_j(y_j)\quad(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$$

均互相平行. 于是条件(4-10)又可以等价地表成

$$\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{ki}}\bigg/\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{li}}=\frac{\partial F_j(y_j)}{\partial y_{kj}}\bigg/\frac{\partial F_j(y_j)}{\partial y_{lj}},\tag{4-10a}$$

$$i=1,\cdots,I,\quad j=1,\cdots,J,\quad k,l=1,\cdots,L.$$

式(4-10a)左端就是消费者 i(商品 k,l 之间) 的边际替代率(参见 2.1.4 小节),右端称为厂商 j(商品 k,l 之间) 的边际转换率,式(4-10a) 表明两者仅决定于 k,l 而与 i,j 无关. 这些结论为求出 Pareto 最优提供了较充分的信息.

现在利用微分条件给出基本福利定理的一个新的证明. 设 $0\neq p\in\mathbf{R}^L_+$,则(x^*,y^*,p) 是关于财富分配 $w_i=p\cdot x_i^*$ 的带转移均衡相当于:x^* 与 y^* 分别解最大化问题

$$\begin{cases}\max u_i(x_i),\\ \text{s.t. } p\cdot x_i\leqslant w_i,\quad x_i\geqslant 0\end{cases}\tag{4-11}$$

与

$$\begin{cases}\max p\cdot y_j,\\ \text{s.t. } F_j(y_j)\leqslant 0,\end{cases}\tag{4-12}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J$. 以上问题的 K-T 条件合在一起是

$$\begin{cases} \nabla u_i(x_i) = \alpha_i p - b_i, & (1 \leqslant i \leqslant I) \\ \lambda_j \nabla F_j(y_j) = p, & (1 \leqslant j \leqslant J) \\ b_i \cdot x_i = \alpha_i(p \cdot x_i - w_i) = 0, & (1 \leqslant i \leqslant I) \\ \lambda_i F_j(y_j) = 0, & (1 \leqslant j \leqslant J) \end{cases} \quad (4\text{-}13)$$

其中 $\alpha_i \geqslant 0, b_i \in \mathbf{R}_+^L\ (1 \leqslant i \leqslant I), \lambda_j \geqslant 0(1 \leqslant j \leqslant J), (x,y) \in A$. 依然限定 $x \gg 0$,则 $b_i = 0$,于是 $\alpha_i > 0, p \gg 0, \lambda_j > 0, F_j(y_j) = 0(1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$. 若令 $\rho_i = 1/\alpha_i$, 则从式(4-13)恰好得出式(4-10). 因在凸性条件下,K-T 条件对于最优性是充分必要的,故以上推导表明,只要 $-u_i(\cdot)$ 与 $F_j(\cdot)$ 皆为凸函数,则$(x^*, y^*) \in A$ 是 Pareto 最优配置 $\Leftrightarrow$ 对于某个 $p > 0$, (x^*, y^*, p) 是关于财富分配 $w_i = p \cdot x_i^*\ (1 \leqslant i \leqslant I)$ 的带转移均衡. 这正是第一与第二基本福利定理的结论.

4.2 存在惟一性

上节只是讨论了均衡与 Pareto 最优的关系,并未提及无疑是最关键的问题:均衡确实存在吗?更进一步,如果均衡存在,它是惟一的吗? 这些问题的解答依赖于一些深刻的数学定理. 为简单起见,仅考虑交换经济或纯交换经济这一特殊情况. 依上节的记号,这意味着 $J = 1, Y = Y_1 = -\mathbf{R}_+^L$,即惟一的生产活动是免费销毁. 此外,还假定 $X_i = \mathbf{R}_+^L$, $\succcurlyeq_i$ 是连续的、严格凸的与强单调的,因而需求函数 $x_i(\cdot, \cdot)$ 是单值连续函数,$1 \leqslant i \leqslant I; \overline{\omega} \gg 0$.

4.2.1 超额需求

本节的基本思想,是将均衡的存在性与某个方程的可解性联系起来. 现在来看如何作到这一点.

设 $p \gg 0$[①]. 对于本节所考虑的纯交换经济,(x^*, y^*, p) 是

① 在偏好为强单调的情况下,若(x^*, y^*, p) 为 Walras 均衡,则必 $p \gg 0$.

Walras 均衡的条件可改述为：

(1) $y^* = 0$;

(2) $x_i^* = x_i(p, p \cdot \omega_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant I)$;

(3) $\sum x_i^* = \overline{\omega}$.

由此可见，Walras 均衡完全决定于均衡价格 $p \gg 0$；而均衡价格 p 又决定于方程

$$\sum_i x_i(p, p \cdot \omega_i) = \overline{\omega},$$

或与之等价的方程

$$z(p) = 0, \tag{4-14}$$

其中，$z(p) = \sum x_i(p, p \cdot \omega_i) - \overline{\omega}$，它可表成

$$z(p) = \sum_i z_i(p), \quad z_i(p) = x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i. \tag{4-15}$$

$z_i(p)$ 正是消费者 i 的需求扣去 ω_i 后的部分，称为**超额需求**；而 $z(p)$ 称为**总超额需求**.

余下的问题就是研究方程(4-14)，这有赖于超额需求函数 $z(p)$ 的某些特殊性质.

命题 4.3 函数 $z(p)$ 有以下性质：

1° $z(p)$ 是 0 次齐次的连续函数；

2° $p \cdot z(p) = 0, z(p) \geqslant -\overline{\omega}$;

3° 若 $p^n \gg 0, p^n \to p \in \partial \mathbf{R}_+^L$ 且 $p \neq 0$，则

$$\max_l z_l(p^n) = \max_l \sum_i z_{il}(p^n) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

证 性质 1°、2°直接由 2.1.2 小节的结论推出，只需证 3°. 为简单起见，不妨设 $L = 2, p = (0, p_2), p_2 > 0, p \cdot \omega_1 = w > 0$. 令 $x_1(p^n, p^n \cdot \omega_1) = (\alpha_n, \beta_n)$，今指明 $\alpha_n \to \infty (n \to \infty)$，由此显然能推出所要结论. 如图 4-1 所示，若 $\alpha_n \not\to \infty$，则不妨设 α_n

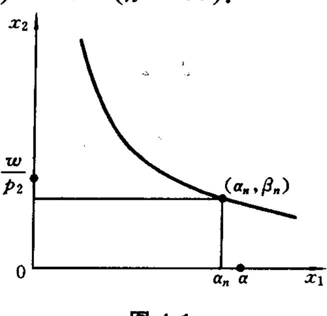


图 4-1

$\to \alpha < \infty$，因(α_n, β_n)在直线$p_1^n x_1 + p_2^n x_2 = w$上，故$\beta_n \to w/p_2 \triangleq \beta$.，$(\alpha, \beta)$必在某一无差别曲线$C$上，$C$在该点有法向量$p$，这与$\succcurlyeq_1$严格凸且强单调相矛盾. □

4.2.2 存在定理

首先引述一个著名数学定理.

Kakutani 不动点定理(1941) 设$\Delta \subset \mathbf{R}^L$是一紧凸集，$F: \Delta \to \Delta$是一上半连续的多值映射，每个$Fp(p \in \Delta)$是非空凸集，则$F$有不动点$p \in \Delta$.

上半连续性见定义 2.1；p是F的不动点$\Leftrightarrow p \in Fp$. Kakutani 定理的证明远不是容易的. 因此可以想见，基于此定理的结果必定有异乎寻常的深刻性.

现在来建立本节的主要结果.

定理 4.2 对于本节所考虑的纯交换经济，Walras 均衡存在.

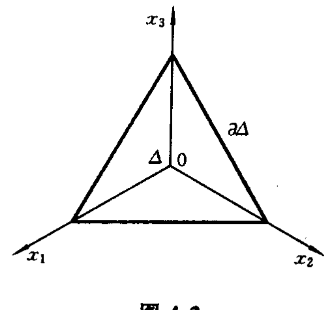


图 4-2

证 只须证方程(4-14)有解. 由$z(p)$的齐次性，当$z(p) = 0$时必有$z(\alpha p) = 0 (\forall \alpha > 0)$. 因此不妨限于紧凸集$\Delta = \{p \in \mathbf{R}_+^L : \sum p_l = 1\}$上寻求方程(4-14)的解. 基本思想是构成一适当的多值映射$F: \Delta \to \Delta$，对之应用 Kakutani 定理得出F的不动点p，然后说明必$z(p) = 0$. 下面将较长的证明分解为三个步骤.

1° 定义映射F. Δ是通常所说的$L-1$维标准单形($L = 3$时，Δ是一个正三角形块，如图 4-2 所示). 定义

$$Fp = \begin{cases} \{q \in \Delta : q \cdot z(p) = \max\limits_{q' \in \Delta} q' \cdot z(p)\}, & 0 \ll p \in \Delta; \\ \{q \in \Delta : p \cdot q = 0\}, & p \in \partial\Delta. \end{cases} \tag{4-16}$$

直接由式(4-16)看出 $F:\Delta\to\Delta, Fp\neq\varnothing(\forall\ p\in\Delta)$. 因由

$$q\cdot z(p)\leqslant\sum_l q_l\cdot\max_l z_l(p)=\max_l z_l(p)\quad(q\in\Delta)$$

得
$$\max_{q'\in\Delta}q'\cdot z(p)=\max_l z_l(p),\tag{4-17}$$

故当 $0\ll p\in\Delta, q\in\Delta$ 时,

$$q\in Fp\Leftrightarrow \text{当 } z_l(p)<\max_k z_k(p) \text{ 时 } q_l=0.\tag{4-18}$$

由此推出,当 $0\ll p\in\Delta, z(p)\neq 0$ 时 $Fp\subset\partial\Delta$. 否则有 $q\in Fp, q\gg 0, z_l(p)=z_1(p)(1\leqslant l\leqslant L)$,从而由命题 4.2 之 2° 有 $0=p\cdot z(p)=z_1(p)$,与 $z(p)\neq 0$ 矛盾. 若 $0\ll p\in\Delta, z(p)=0$,则直接由式(4-16) 知 $Fp=\Delta$. 若 $p\in\partial\Delta, q\in Fp$,则从 $p\cdot q=0$ 推出 $q\in\partial\Delta$. 这就得到

$$\begin{cases}0\ll p\in\Delta, z(p)=0\Rightarrow F(p)=\Delta;\\ 0\ll p\in\Delta, z(p)\neq 0 \text{ 或 } p\in\partial\Delta\Rightarrow Fp\subset\partial\Delta.\end{cases}\tag{4-19}$$

若 $p\in Fp$,则必 $p\gg 0$(否则 $p\in\partial\Delta, p\cdot p=0$,与 $p\neq 0$ 矛盾),且 $z(p)=0$,否则由式(4-19) 有 $p\in\partial\Delta$,与 $p\gg 0$ 矛盾. 余下只需验证 F 满足 Kakutani 定理之条件.

2° 验证 $Fp(p\in\Delta)$ 为凸集. 若 $p\gg 0$,则由式(4-16) 有

$$Fp=\Delta\cap\Big[\bigcap_{q'\in\Delta}\{q:q\cdot z(p)\geqslant q'\cdot z(p)\}\Big],$$

Fp 作为凸集之交必为凸集. 若 $p\in\partial\Delta$,则 Fp 是 Δ 与超平面 $\{q:p\cdot q=0\}$ 之交,亦为凸集.

3° 验证 F 上半连续. 设 $p^n\to p, q^n\in Fp^n, q^n\to q(n\to\infty)$,要证 $q\in Fp$. 若 $p\gg 0$,则不妨设 $p^n\gg 0$,于是由式(4-16) 有

$$q^n\cdot z(p^n)\geqslant q'\cdot z(p^n)\quad(\forall\ q'\in\Delta).$$

令 $n\to\infty$ 得 $q\cdot z(p)\geqslant q'\cdot z(p)(\forall\ q'\in\Delta)$,因而 $q\in Fp$. 下面设 $p\in\partial\Delta$,要证 $p\cdot q=0$. 若有任意大的 n 使 $p^n\in\partial\Delta$,从而 $p^n\cdot q^n=0$,则必 $p\cdot q=0$. 因此下面不妨设 $p^n\gg 0(\forall\ n\in\mathrm{N})$. 为证 $p\cdot q=0$,只要 $p_lq_l=0(1\leqslant l\leqslant L)$. 不妨只证 $p_1q_1=0$,且可设 $p_1>0$,因而不妨设 $p_1^n>p_1/2(\forall\ n\in\mathrm{N})$. 结合式(4-16)、(4-17) 与命题 4.2 之 3° 有

$$\beta_n \triangleq \max_l z_l(p^n) = q^n \cdot z(p^n) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

若 $q_1^n > 0$，则由式(4-18)有 $z_1(p^n) = \beta_n$，于是由 $p^n \cdot z(p^n) = 0$ 推出

$$\begin{aligned}\beta_n &= -\frac{1}{p_1^n}\sum_{l>1} p_l^n z_l(p^n) \\ &\leqslant \frac{1}{p_1^n}\sum_{l>1} p_l^n \bar{\omega}_l \qquad (\text{用命题 4.2 之 } 2^\circ) \\ &\leqslant \frac{2}{p_1} p^n \cdot \bar{\omega} \leqslant \text{const}.\end{aligned}$$

因 $\beta_n \to \infty$，故当 n 充分大时必 $q_1^n = 0$，因此 $q_1 = 0$，从而 $p_1 q_1 = 0$.

□

4.2.3 局部惟一性

与存在性同样重要的是惟一性：如果均衡不是惟一的，那么，依据均衡理论如何能预告市场选择的一个确定结局？然而，要在整体上确立均衡的惟一性，常常是一个过高的要求. 实际上，如果我们能确立均衡的局部惟一性，而依据已知信息又足以判定均衡所在的范围，那么，我们就能完全确定一个惟一的均衡结局. 因此，我们不妨专注于较容易的局部惟一性问题.

由于函数 $z(\cdot)$ 的齐次性，方程(4-14)显然不具有解的惟一性. 另一方面，由于 $p \cdot z(p) = 0$(命题 4.2 之 2°)，方程 $z_l(p) = 0$($1 \leqslant l \leqslant L$) 也不是相互独立的. 以上事实促使我们对方程(4-14)进行一番改造. 首先，通过约定 $p_L = 1$ 而将价格标准化，且约定 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_{L-1}) \in \mathbf{R}^{L-1}$ 等同于 $(p_1, p_2, \cdots, p_{L-1}, 1)$. 其次，令

$$\hat{z}(p) = (z_1(p), z_2(p), \cdots, z_{L-1}(p)),$$

则显然 $\hat{z}(p) = 0 \Leftrightarrow z(p) = 0$. 这就将方程(4-14)转化为与之等价的方程

$$\hat{z}(p) = 0. \tag{4-20}$$

现在我们约定，当 p 满足方程(4-20)时称之为标准化均衡价格. 为应用分析工具，需假定 $\hat{z}(\cdot): \mathbf{R}_{++}^{L-1} \to \mathbf{R}^{L-1}$ 为 C^1 函数. 惟一性的讨

论依赖于以下概念.

定义 4.2 若 $\bar{p} \in \mathbf{R}_{++}^{L-1}$ 满足条件

$$\hat{z}(\bar{p}) = 0, \quad \det \hat{z}'(\bar{p}) \neq 0, \tag{4-21}$$

则称 $\bar{p}$ 为正则均衡价格①. 若方程(4-20)的所有解 $p \in \mathbf{R}_{++}^{L-1}$ 都是正则的,则称该经济为正则经济.

标准化均衡价格 p 是局部惟一的,意味着在 p 的邻近不再有其他标准化均衡价格,这相当于 p 是方程(4-20)的孤立解. 以下定理解答了局部惟一性问题.

定理 4.3 正则均衡价格是局部惟一的;正则经济至多有有限多个标准化均衡价格.

证 若 $\bar{p} \gg 0$ 满足条件(4-21),则由反函数定理(参见文献[5]Th. 5.2.3),在 $\bar{p}$ 的某个邻域 U 内,$\hat{z}(\cdot)$ 的反函数存在,从而 $\bar{p}$ 是方程(4-20)在 U 内的惟一解.

若所考虑的经济是正则的,则方程(4-20)的所有解都是孤立的. 现在设方程(4-20)有无限多个解 $p^n(n = 1,2,\cdots)$,由此导出矛盾. 不妨设 $\{p^n\}$ 有界,否则,按新的方式标准化,总可以造出一有界的子列(参看本页脚注). 因此,不妨设 $p^n \to p(n \to \infty)$,显然 $\hat{z}(p) = 0$. 若 $p \gg 0$,则 p 是正则的,但不是孤立点,得出矛盾. 因此 $p \in \partial\mathbf{R}_{+}^{L-1}$. 由命题 4.2 之 3°,应有 $\max\limits_{l} z_l(p^n) \to \infty(n \to \infty)$,但这与 $\hat{z}(p^n) = 0$ 相矛盾. □

如果 p 是正则均衡价格,则 $\operatorname{sgn} \det \hat{z}'(p)$ 服从于很强的规则,这由以下结果所刻画.

命题 4.4(指标定理) 对于正则经济有

$$\sum_{\hat{z}(p)=0} \operatorname{sgn} \det \hat{z}'(p) = (-1)^{L-1}. \tag{4-22}$$

指标定理建立在深刻的拓扑结论的基础上,在没有准备足够

---

① 可以验证(尽管有些繁琐),条件(4-21)以及 $\det\hat{z}'(\bar{p})$ 的符号都与价格标准化的方式无关. 例如通过约定 $p_1 = 1$ 亦能达到同一结论.

预备知识的情况下，无法引述其证明. 指标定理的深刻性是异乎寻常的，远非直觉的观察所能体会认识. 例如，从式(4-22)直接推出：标准化均衡价格的个数不可能是偶数，特别不能为0，这就得出结论：均衡必定存在！

*4.3 核等价定理

4.3.1 核概念

上节证明了，在一定条件下 Walras 均衡存在. 但存在定理本身并不能说明，逻辑上存在的均衡在现实的经济运行过程中必然实现. 这就遗留一个不可回避的重大问题：市场机制必然导致均衡吗？其实，英国经济学家与统计学家 Edgeworth(1845—1926)早就研究过均衡价格出现的过程(1881年)，他提出了所谓核的概念，这个概念本身足够简单，不涉及任何特殊的交易机制. 不过，Edgeworth 的工作在当时没有多少影响. 只是后来，人们才发现他的概念对于现代均衡理论的重要性.

为简单起见，仍然限于考虑纯交换经济，且保持上节的所有假定与记号. 此外设 $\omega_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant I)$. 若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_I) \in \mathbf{R}_+^{IL}$ 满足 $\sum\limits_i x_i \leqslant \overline{\omega}$，则称 x 为一个可行配置.

定义 4.3 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_I)$ 是一可行配置，$\varnothing \neq S \subset I$①. 若 $\forall\, i \in S$，$\exists\, x_i' \in \mathbf{R}_+^L$，使得

$$x_i' \succ_i x_i \quad (\forall\, i \in S) \text{ 且} \sum_{i \in S} (x_i' - \omega_i) \leqslant 0, \qquad (4\text{-}23)$$

则说 S 改进 x. 若 x 不能被 I 的任何非空子集所改进，则称 x 为核配置；核配置的全体称为核.

注意，式(4-23)可改换成形式上较弱的条件

---

① 可设想 S 是一组消费者的联盟. 不过，下面无需使用这一术语.

$$\begin{cases} x_i' \succcurlyeq_i x_i \quad (\forall\, i \in S), \text{至少对一个 } i \in S: x_i' \succ_i x_i; \\ \sum_{i \in S} (x_i' - \omega_i) \leqslant 0. \end{cases} \tag{4-24}$$

事实上,若条件(4-24)满足,不妨设 $1 \in S$, $x_1' \succ_1 x_1$. 取 $x_1'' < x_1'$,使 $x_1' - x_1''$ 充分小,因而仍有 $x_1'' \succ_1 x_1$;然后将 $x_1' - x_1''$ 转移给其他 $i \in S$,使 x_i' 增加为 x_i'',从而 $x_i'' \succ_i x_i$(强单调性),且保持了 $\sum_{i \in S} x_i'' = \sum_{i \in S} x_i'$.

以下命题指明了核配置与 Pareto 最优配置、均衡配置的关系.

命题 4.5 核配置必为 Pareto 最优配置;Walras 均衡配置必为核配置.

证 若取 $S = I$,则条件(4-24)相当于说 $x' = (x_1', x_2', \cdots, x_I')$ 是 x 的 Pareto 改进(参见 4.1.1 小节). 因此,当 x 是核配置时必为 Pareto 最优配置.

其次,设 x 是 Walras 均衡配置,$p \gg 0$ 是相应的均衡价格,则 $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i (1 \leqslant i \leqslant I)$. 若对某个 $\varnothing \neq S \subset I$, $x_i' \in \mathbf{R}_+^L$,条件(4-23)满足,则 $p \cdot x_i' > p \cdot \omega_i (i \in S)$,于是

$$0 \geqslant \sum_{i \in S} (p \cdot x_i' - p \cdot \omega_i) > 0,$$

得出矛盾. 因此,x 必为核配置. □

由此可见,核配置是一个介于 Walras 均衡配置与 Pareto 最优配置之间的概念. 在这个意义上,核与均衡并不等价;另一方面,如果让经济在保持一定结构的条件下无限扩大其规模,则核配置将无限接近于均衡配置,因而在极限状态下两者趋于等价. 这就是下面所要证实的.

4.3.2 核等价

考虑一个不断重复扩大的经济:设 $I = NH$,它被分成 H 组,每组 $h(1 \leqslant h \leqslant H)$ 的 N 个成员完全均等(如同一个人的复制品),例如他们有同样的偏好 $\succcurlyeq_h$,同样的禀赋 ω_h,同样的效用函数 $u_h(\cdot)$

等等. 以 C_N 记此经济的核. 若 $x=(x_{hn})\in \mathbf{R}_+^{IL}$ 是一配置,$x_{hn}=x_h(\forall\ n\in N$,这意味着组内均等分配),则称 x 为一个类配置,记作 $(x_h)_{h\in H}$,它实质上与 N 无关.

以下是本节的中心结果.

定理 4.4(核等价定理) 对于上面所描述的经济,一个类配置 $x^*=(x_h^*)_{h\in H}$ 是 Walras 均衡配置 $\Leftrightarrow x^*\in\bigcap\limits_{N>0}C_N$.

证 已经指明 Walras 均衡必为核配置,因此只须证明:若 $x^*\in\bigcap\limits_{N>0}C_N$,则 x^* 必为 Walras 均衡配置.

1° $x^*\in C_N$ 推出 x^* 必为类配置. 否则,$x^*=(x_{hn}^*)$,存在 $m,n\in N$,使 $x_{1m}^*\neq x_{1n}^*$. 其次,不妨设 $\forall\ h\in H,\forall\ k\in N$,有 $x_{hn}^*\succcurlyeq_h x_{h1}^*$(必要时适当调整序号). 由偏好 $\succcurlyeq_h$ 严格凸得出

$$\overline{x}_h\triangleq\frac{1}{N}\sum_k x_{hk}^*\succcurlyeq_h x_{h1}^*,\quad \overline{x}_1\succ_1 x_{11}^*. \tag{4-25}$$

令 $S=\{(h,1):1\leqslant h\leqslant H\}$(各组中待遇最差者结盟),令 $x_{h1}=\overline{x}_h$,则

$$\sum_h(x_{h1}-\omega_h)=\frac{1}{N}\sum_{h,k}(x_{hk}^*-N\omega_h)\leqslant 0.$$

这与式(4-25)一起说明 S 改进 x^*,与 $x^*\in C_N$ 相矛盾.

2° 证 $x^*\in\bigcap\limits_{N>0}C_N$ 必为 Walras 均衡配置. 为简单起见,仅考虑以下特殊情况:$u_h(\cdot)\in C^1$,且 $\nabla u_h(\cdot)\gg 0$;$x^*\gg 0$. 因 x^* 是 Pareto 最优配置,由定理 4.1,存在价格 p,使(x^*,p) 是带转移均衡. 当 $x^*\in C_N$ 时容易看出 $\sum x_h^*=\overline{\omega}$(否则 $S=I$ 即可改进 x^*). 因此,若 x^* 不是 Walras 均衡,则不妨设 $p\cdot x_1^*>p\cdot\omega_1$. 令 $S=\{(h,n):(h,n)\neq(1,1)\}$,

$$x_{hn}=x_h^*+\frac{1}{NH-1}(x_1^*-\omega_1),\quad (h,n)\in S.$$

则
$$\sum_{(h,n)\in S}(x_{hn}-\omega_h)=N\sum_h(x_h^*-\omega_h)\leqslant 0.$$

因 $x_h^*\gg 0$,可取 N 充分大,使 $x_{hn}\gg 0$.

$$u_h(x_{hn}) - u_h(x_h^*)$$
$$= \frac{1}{NH-1}\nabla u_h(x_h^*)\cdot(x_1^* - \omega_1) + o\left(\frac{1}{N}\right)$$
$$= \frac{\lambda}{NH-1}(p\cdot x_1^* - p\cdot\omega_1) + o\left(\frac{1}{N}\right) > 0,$$

其中，用到$\nabla u_h(x_h^*)=\lambda p$（定理 2.2）. 这得出 $x_{h,n} > x_h^*$ $(1\leqslant h\leqslant H)$，可见 S 改进 x^*，与 $x^*\in C_N$ 相矛盾. □

显然 $C_{N+1}\subset C_N$，因而 C_N 随 N 增大而变小. 定理 4.4 则断言，C_N 中的非 Walras 均衡配置在 N 增大的过程中会被逐次排除，最终仅余下均衡配置. 这就表明，当经济规模无限增大时，核配置最终等价于均衡配置.

4.4 局部均衡

前几节中的均衡理论在很宽泛的条件下展开，其结论具有高度的一般性. 但对于一些具体的经济问题的分析，应用由 Marshall(1842—1924)提出的局部均衡理论更为方便.

4.4.1 模型与均衡条件

如果我们的主要兴趣是某一特定商品 l 的市场，那么，如在经济学中常见的、合适的方法是将该市场从整个商品市场中分离出来，从而可建立一个较简单的模型. 因为商品 l 的市场只是整个商品市场的一个很小的部分，故可以认为 l 以外的其他商品的价格不受商品 l 交易的影响，因而不妨设是不变的. 其次，对 l 的消费只是每个消费者总预算中的一个较小部分，因而不妨设对 l 的需求与消费者的财富无关.

基于上述考虑，现在对所研究的市场作一个完全形式的描述. 考虑一个包括商品 l 与 m 的两商品市场，其中 m 可看做是由 l 以外

的其他商品组成的复合商品，假定其价格为 1，因而 m 起货币的作用，不妨称为货币商品. 以 p 记商品 l 的价格. 每个消费者 $i(1 \leqslant i \leqslant I)$ 的初始资源仅有 m，其数量为 $\omega_{mi} > 0$；令 $\omega_m = \sum_i \omega_{mi}$. 消费者 i 具有拟线性的效用函数(参看例 2.2)

$$u_i(m_i, x_i) = m_i + \varphi_i(x_i), \quad (m_i, x_i) \in X_i \triangleq \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+,$$

其中，m_i 与 x_i 分别为商品 m 与 l 的消费量，容许 m_i 取负值使下面的分析显著简化. 假定 $\varphi_i(\cdot) \in C^2$ 且满足条件

$$\varphi_i(0) = 0, \quad \varphi_i'(\infty) = 0, \quad \varphi_i'(\cdot) > 0, \quad \varphi_i''(\cdot) < 0. \tag{4-26}$$

如 2.2.4 小节中所指明的，采用拟线性效用函数使得需求与财富无关，而这正是所研究的局部市场所要求的.

其次，设厂商 $j(1 \leqslant j \leqslant J)$ 投入 m 生产 l，投入量与产量分别记为 z_j 与 q_j，成本函数为 $c_j(q_j)$，假定 $c_j(\cdot) \in C^2$ 且满足条件①

$$c_j'(\infty) = \infty, \quad c_j'(\cdot) > 0, \quad c_j''(\cdot) > 0 \tag{4-27}$$

因 j 的生产函数为 $c_j^{-1}(\cdot)$(参见 3.3.3 小节)，故 j 有生产集(参见式(3-2))

$$Y_j = \{(z_j, q_j) : q_j \geqslant 0, z_j \leqslant -c_j(q_j)\}. \tag{4-28}$$

依 4.1.1 小节，当 $(m_i, x_i) \in X_i, (z_j, q_j) \in Y_j (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$ 时，

$$(m_1, x_1, m_2, x_2, \cdots, m_I, x_I, z_1, q_1, z_2, q_2, \cdots, z_J, q_J)$$

组成一个配置；若它满足市场出清条件(参见式(4-1))

$$\sum_i x_i = \sum_j q_j; \tag{4-29}$$

$$\sum_i m_i = \omega_m + \sum_j z_j, \tag{4-30}$$

则称为可行配置. 为行文简便起见，略去 m_i, z_j，将一个配置简写作

---

① 许多结果只用到 $c''_j(\cdot) \geqslant 0$，但排除 $c''_j(\cdot) = 0$ 更简便些；其次，条件 $c'_j(\infty) = \infty$ 也不是必要的，这些都可作更细致的讨论.

$(x_1,x_2,\cdots,x_I,q_1,q_2,\cdots,q_J)$或$(x_i,q_j)$；当式(4-29)满足时说它是可行的.

利用定义 4.1、效用最大化与利润最大化的微分条件(参见 2.1.4与 3.3.2 小节),可得以下基本结果.

定理 4.5 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_I^*,q_1^*,q_2^*,\cdots,q_J^*)\in \mathbf{R}_+^{I+J}$与 $p^*>0$ 组成 Walras 均衡的充要条件是

$$c_j'(q_j^*)\geqslant p^*,\text{当 } q_j^*>0 \text{ 时等式成立}\quad (1\leqslant j\leqslant J);\tag{4-31}$$

$$\varphi_i'(x_i^*)\leqslant p^*,\text{当 } x_i^*>0 \text{ 时等式成立}\quad (1\leqslant i\leqslant I);\tag{4-32}$$

$$\sum_i x_i^* = \sum_j q_j^*.\tag{4-33}$$

证 由条件(4-27),$c_j(\cdot)$是凸函数.于是q_j^*是厂商j在价格p^*下的利润最大化产量的充要条件是式(4-31)成立(参见式(3-30)).

消费者$i(1\leqslant i\leqslant I)$的效用最大化问题是

$$\begin{cases}\max[m_i+\varphi_i(x_i)],\\ \text{s.t. } m_i+p^*x_i\leqslant w_i,\quad (m_i,x_i)\in X_i,\end{cases}$$

其中,$w_i=\omega_{mi}+\sum_j\theta_{ij}[p^*q_j^*-c_j(q_j^*)]$,$\theta_{ij}$是$i$占有厂商$j$的利润的份额.因极大效用必在直线$m_i+p^*x_i=w_i$上达到,故可依此消去$m_i$,将效用最大化问题简化为

$$\max_{x_i\geqslant 0}[w_i-p^*x_i+\varphi_i(x_i)].\tag{4-34}$$

由条件(4-26)知问题(4-34)的目标函数是凹函数,故式(4-32)正好是x^*为问题(4-34)的解的充要条件.

最后考虑市场出清条件.令$m_i^*=w_i-p^*x_i^*$,$z_j^*=-c_j(q_j^*)$.假定式(4-33)满足,则

$$\begin{aligned}\sum_i m_i^* &= \sum_i(w_i-p^*x_i^*)\\ &=\sum_i\left\{\omega_{mi}-p^*x_i^*+\sum_j\theta_{ij}[p^*q_j^*-c_j(q_j^*)]\right\}\end{aligned}$$

$$= \omega_m + \sum_j z_j^*,$$

这表明 $m_i^*, x_i^*, z_j^*, q_j^* (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$满足市场出清条件(4-29)、(4-30).

综上所证,知定理结论成立. □

值得注意的是,均衡条件(4-31)～(4～33)完全不涉及 ω_{mi} 与 θ_{ij}. 这一特别简单的结果当然依赖于效用函数的拟线性,因而并不具有普遍性.

定理 4.5 中的 x_i^*, q_j^*, p^* 分别称为均衡消费,均衡产出与均衡价格,若 $x_i^*, q_j^* > 0 (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$,则条件(4-31)～(4-33)意味着 x_i^*, q_j^*, p^* 满足方程组

$$\begin{cases} c_j'(q_j^*) = p^* \quad (1 \leqslant j \leqslant J), \\ \varphi_i'(x_i^*) = p^* \quad (1 \leqslant i \leqslant I), \\ \sum_i x_i^* = \sum_j q_j^*. \end{cases} \tag{4-35}$$

由条件(4-26)、(4-27),函数 $\varphi_i'(\cdot)$有定义于区间 $(0, \varphi_i'(0))$ 上的严格单调减的反函数 $\varphi_i^{-1\prime}(\cdot)$, $c_j'(\cdot)$有定义于区间 $(c_j'(0), \infty)$上的严格单调增的反函数 $c_j'^{-1}(\cdot)$. 现在令

$$x_i(p) = \begin{cases} \varphi_i'^{-1}(p), 0 < p < \varphi_i'(0), \\ 0, \qquad p \geqslant \varphi_i'(0); \end{cases} \tag{4-36}$$

$$q_j(p) = \begin{cases} 0, \qquad 0 < p \leqslant c_j'(0), \\ c_j'^{-1}(p), p > c_j'(0); \end{cases} \tag{4-37}$$

$$x(p) = \sum_i x_i(p), \quad q(p) = \sum_j q_j(p). \tag{4-38}$$

则 $x_i(p)$是消费者 i 的需求函数,$q_j(p)$是厂商 j 的供应函数(参见 2.1.1 与 3.2.1 小节),$x(p)$与 $q(p)$分别为总需求函数与总供应函数. 令

$$\underline{p} = \min_j c_j'(0), \quad \bar{p} = \max_i \varphi_i'(0).$$

$x(p)$在区间$(0, \bar{p})$上严格单调减,$q(p)$在$(\underline{p}, \infty)$上严格单调增. 若 $\underline{p} < \bar{p}$,则必有惟一的 $p^* \in (\underline{p}, \bar{p})$,使得

$$x^* \triangleq x(p^*) = q(p^*), \tag{4-39}$$

这恰与市场出清条件(4-33)一致. 式(4-39)就是确定均衡价格 p^* 的方程. 几何上, p^* 是总需求曲线 $x=x(p)$ 与总供应曲线 $q=q(p)$ 之交点的纵坐标(如图 4-3), 该交点的横坐标则是均衡总需求或均衡总产出 x^*.

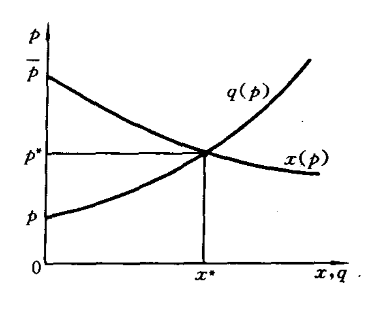


图 4-3

如在 3.2.5 小节中指出的, 总供应函数 $q(p)$(依式(4-38))可看做某个代表生产者依利润最大化或成本最小化原则所决定的供应函数; 若以 $C(\cdot)$ 记代表生产者的成本函数, 则 $p=C'(q)$(参见式(3-30)), 这与 $q=q(p)$ 对照得出

$$C'(\cdot) = q^{-1}(\cdot). \tag{4-40}$$

类似地, $x(p)$(依式(4-38))可看作某个代表消费者的需求函数, 约定

$$P(\cdot) = x^{-1}(\cdot), \tag{4-41}$$

$P(\bar{x})$ 表示对应于总需求 $\bar{x}$ 的价格.

4.4.2 比较静态分析

如果市场条件依赖于某些参数, 那么均衡价格 p^*、均衡需求 x_i^* 等自然与参数有关, 这就产生参数变动对于均衡水平的效应问题. 这一问题的解决依赖于计算 p^*, x_i^* 等对参数的导数.

在函数 $\varphi_i(\cdot)$ 与 $c_j(\cdot)$ 中分别引入参数 α 与 β, 得到函数

$$\varphi_i(x_i,\alpha):\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^M\to\mathbf{R}\quad(1\leqslant i\leqslant I)$$

与

$$c_j(q_j,\beta):\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^S\to\mathbf{R}\quad(1\leqslant j\leqslant J).$$

其次，受税收或补贴之类的政策因素的影响，消费者 i 与厂商 j 实际支付或接受的价格可能偏离市场价格 p，设分别为 $p_i(p,t)$ 与 $\hat{p}_j(p,t)$ $(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$，其中 $t\in\mathbf{R}^K$ 是参数. 于是，均衡方程组(4-35)现在应改写成

$$\begin{cases} c_j'(q_j^*,\beta)=\hat{p}_j(p^*,t) \quad (1\leqslant j\leqslant J), \\ \varphi_i'(x_i^*,\alpha)=p_i(p^*,t) \quad (1\leqslant i\leqslant I), \\ \sum\limits_i x_i^*=\sum\limits_j q_j^*. \end{cases} \tag{4-42}$$

方程组(4-42)确定 x_i^*,q_j^*,p^* $(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$ 为参数 $(\alpha,\beta,t)\in\mathbf{R}^M\times\mathbf{R}^S\times\mathbf{R}^K$ 的隐函数，其偏导数可由通常的隐函数微分法算出.

下面是一个用作说明的简单例子.

例 4.1(商品税的效应)　设政府对消费商品 l 课税，税率为 $t\geqslant 0$，致使消费者实际支付的价格由 p 升至 $p+t$；而厂商则仍按价格 p 售出其产品. 这意味着 $p_i(p,t)=p+t,\hat{p}_j(p,t)=p$ $(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$，$\varphi_i(\cdot)$，$c_j(\cdot)$ 保持不变. 将以上各式代入式(4-42)，并利用式(4-36)～(4-38)，得到

$$x(p^*+t)=q(p^*)\triangleq q^*.$$

上式两边对 t 求导得(注意 $p^*=p^*(t)$!)

$$x'(p^*+t)\left(\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}+1\right)=q'(p^*)\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t},$$

由此解出

$$\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}=\frac{x'(p^*+t)}{q'(p^*)-x'(p^*+t)}. \tag{4-43}$$

由前段的分析易知，在适当的区间上有 $x'(\cdot)<0,q'(\cdot)>0$，于是由式(4-43)得出

$$-1<\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}<0;$$

$$0<\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^*+t)<1;$$

$$-q'(p^*)<\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t}<0.$$

这就表明，当税率 t 增加时，均衡价格 p^* 与总产出 q^* 适度下降，而消费者的实际支付价格适度上升. 若 $q'(p^*)$ 远大于 $|x'(p^*+t)|$，则由式(4-43)有

$$\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}\approx 0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^*+t)\approx 1,$$

此时主要由消费者承受税收上升的影响. 反之，若 $q'(p^*)\approx 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}t}\approx -1,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^*+t)\approx 0,$$

此时税收的主要影响转到厂商方面.

4.4.3 福利分析

福利分析的问题是：对于给定的可行配置(x_i,q_j)，如何评价其社会福利？当配置改变时，社会福利如何变化？如同在2.3节中一样，首要的问题是选定一个适当的量度福利的函数. 鉴于 Pareto 最优性是社会福利的一个基准条件，而效用可能性集 U 完全刻画了 Pareto 最优配置(参见4.1.3小节)，我们从对集 U 的讨论入手.

命题 4.6 设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_I)\in\mathbf{R}^I$. 则 $u\in U$ 的充要条件是，存在$(x_1,x_2,\cdots,x_I,q_1,q_2,\cdots,q_J)\in\mathbf{R}_+^{I+J}$，它满足市场出清条件(4-29)及不等式

$$\sum_i u_i\leqslant \omega_m+S(x_i,q_j),\tag{4-44}$$

其中，$S(x_i,q_j)$是如下的 Marshall 总剩余

$$\begin{aligned}S(x_i,q_j)&=S(x_1,x_2,\cdots,x_I,q_1,q_2,\cdots,q_J)\\&=\sum_i\varphi_i(x_i)-\sum_j c_j(q_j).\end{aligned}\tag{4-45}$$

证 若 $u\in U$，则有 $(m_i,x_i)\in X_i$，$(z_j,q_j)\in Y_j(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$，使式(4-29)、(4-30)满足，且 $u_i\leqslant m_i+\varphi_i(x_i)(1\leqslant i\leqslant I)$，于是

$$\begin{aligned}\sum_i u_i &\leqslant \sum_i m_i + \sum_i \varphi_i(x_i)\\ &= \omega_m + \sum_j z_j + \sum_i \varphi_i(x_i) \qquad (\text{用式(4-30)})\\ &\leqslant \omega_m - \sum_j c_j(q_j) + \sum_i \varphi_i(x_i) \quad (\text{用式(4-28)})\\ &= \omega_m + S(x_i,q_j). \qquad (\text{用式(4-45)})\end{aligned}$$

反之，设 $x_i\geqslant 0,q_j\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$ 满足式(4-29)、(4-44)，令 $z_j=-c_j(q_j)(1\leqslant j\leqslant J)$，$m_i=u_i-\varphi_i(x_i)(1<i\leqslant I)$，

$$m_1 = \omega_m + \sum_j z_j - \sum_{i>1} m_i,$$

则显然 $(m_i,x_i)\in X_i$，$(z_j,q_j)\in Y_j(1\leqslant i\leqslant I,1\leqslant j\leqslant J)$ 满足式(4-30)；由式(4-44)推出

$$\begin{aligned}u_1 &\leqslant \omega_m + S(x_i,q_j) - \sum_{i>1} u_i\\ &= \omega_m + \varphi_1(x_1) + \sum_{i>1}[\varphi_i(x_i) - u_i] + \sum_j z_j\\ &= m_1 + \varphi_1(x_1)\end{aligned}$$

因而 $u_i\leqslant m_i+\varphi_i(x_i)(1\leqslant i\leqslant I)$，这表明 $u\in U$. □

命题 4.6 表明，集 U 完全决定于函数 $S(\cdot,\cdot)$. 若令

$$\beta = \sup\{\omega_m + S(x_i,q_j):(x_i,q_j)\ \text{是可行配置}\}, \qquad (4\text{-}46)$$

则 U 恰以超平面 $\sum u_i = \beta$ 为其边界. 只要假定 $\varphi_i(\cdot)$ 皆有界(因而必定 $\phi_i(\infty) = 0$)，就有 $\beta < \infty$. 若令

$$\begin{aligned}S(x) &= \max\left\{S(x_i,q_j) : x_i,q_j\geqslant 0, \sum_i x_i = \sum_j q_j = x\right\}\\ &= \max\left\{\sum_i \varphi_i(x_i) : x_i\geqslant 0, \sum_i x_i = x\right\}\\ &\quad -\min\left\{\sum_j c_j(q_j) : q_j\geqslant 0, \sum_j q_j = x\right\}, \quad x\geqslant 0, \qquad (4\text{-}47)\end{aligned}$$

则

$$\beta = \omega_m + \sup_{x\geqslant 0} S(x),$$

可见集合 U 完全由函数 $S(x)$ 确定. 这就表明，函数 $S(x)$ 是福利分析的一个适当工具.

式(4-47)表明，$S(x)$ 决定于如下两个约束极值问题

$$\begin{cases} \max \sum_i \varphi_i(x_i), \\ \text{s.t.} \sum_i x_i = x, \quad x_i \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant I); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \sum_j c_j(q_j), \\ \text{s.t.} \sum_j q_j = x, \quad q_j \geqslant 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant J). \end{cases}$$

假定它们有正解 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_I) \gg 0$ 与 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \cdots, \bar{q}_J) \gg 0$，则由一阶微分条件得出

$$\varphi_i'(\bar{x}_i) = \lambda, \quad c_j'(\bar{q}_j) = \mu \quad (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J),$$

其中，λ, μ 是与 x 有关的正数. 利用式(4-36)、(4-38)有

$$x = \sum_i \bar{x}_i = \sum_i x_i(\lambda) = x(\lambda),$$

这与式(4-41)对照得 $\lambda = P(x)$. 同理有 $\mu = C'(x)$. 因此得

$$\begin{cases} \varphi_i'(\bar{x}_i) = P(x), \quad c_j'(\bar{q}_j) = C'(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J); \\ S(x) = \sum_i \varphi_i(\bar{x}_i) - \sum_j c_j(\bar{q}_j). \end{cases} \tag{4-48}$$

利用式(4-48)形式求导得到

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_i \varphi_i'(\bar{x}) \frac{\mathrm{d}\bar{x}_i}{\mathrm{d}x} - \sum_j c_j'(\bar{q}_j) \frac{\mathrm{d}\bar{q}_j}{\mathrm{d}x} \\ &= P(x) - C'(x) \quad (x \geqslant 0). \end{aligned} \tag{4-49}$$

以上推理可以作得完全严格，从而证明式(4-49)是一正确的结果. 进而由积分得到

$$S(x) = S(0) + \int_0^x [P(s) - C'(s)]\mathrm{d}s \quad (x \geqslant 0). \tag{4-50}$$

因 $S''(x) = P'(x) - C''(x) \leqslant 0$，故 $S(x)$ 为凹函数，它在 $S'(x)$ 的零

点 x^*(即 $P(x^*)=C'(x^*)$)达到最大. 对照式(4-35)与式(4-48)看出,$P(x^*)$与 x^* 正好是均衡价格与均衡总消费. 因 $\beta=\omega_m+S(x^*)$,故竞争均衡配置必为 Pareto 最优配置. 这就印证了第一基本福利定理.

现在应用所得结果来继续讨论例 4.1 在税率 t 之下的均衡需求记作 $x_i^*(t)(1\leqslant i\leqslant I)$,令

$$x^*(t)=\sum_i x_i^*(t),\quad S^*(t)=S(x^*(t)).$$

这结合式(4-50)得出

$$S^*(t)=S^*(0)+\int_{x^*(0)}^{x^*(t)}[P(s)-C'(s)]\mathrm{d}s. \qquad (4\text{-}51)$$

在 4.4.2 小节中已指明 $\mathrm{d}q^*/\mathrm{d}t<0$,即 $x^{*\prime}(t)<0$;这推出 $x^*(t)\leqslant x^*(0)$,$S'(x^*(t))\geqslant S'(x^*(0))=0$,因此

$$S^{*\prime}(t)=S'(x^*(t))\,x^{*\prime}(t)\leqslant 0\quad(\forall\, t\geqslant 0).$$

这表明 $S^*(t)$是 t 的减函数,因而当 $t=0$ 时社会福利最大. 当 $t>0$ 时,$S^*(0)-S^*(t)$量度了因征税而遭受的社会福利损失,即所谓无谓损失(参见 2.3.3 小节).

*4.5 两人经济

本节考虑最简单的经济模型——两人经济模型,包括两消费者、一消费者与一生产者、两生产者 3 种情况. 两人经济当然极不现实,关于"两人社会"这样的经济学虚构在经济学史上曾遭到种种嘲笑与抨击. 然而,正是这种极简单的经济模型为一般理论提供了直观解释与重要启示. 两人模型的主要好处之一是有很清晰的几何图示.

4.5.1 两消费者经济

在 4.2~4.3 节中,我们考虑了纯交换经济. 要有真正的交换

发生，显然至少要有两个消费者与两种商品. 现在就假定最简单的情况：$I=L=2$. 设消费者 $i(=1,2)$ 的消费集为 $\mathbf{R}_{+}^{2}$，禀赋为 ω_i，效用函数为 $u_i(\cdot)$，假定 $u_i(\cdot)$ 可微且表示一个强单调与严格凸的偏好 $\succcurlyeq_i$（参见 1.1～1.2 节）. 令 $\bar{\omega}=\omega_1+\omega_2=(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2)$，设 $\bar{\omega}\gg 0$. 如同本章前几节一样，假定 $i=1,2$ 都是市场价格的接受者，这在一个两人社会中无疑是很不现实的，但我们只关心这一假设的逻辑推论.

形式上，每个可行配置 $x=(x_1,x_2)$ 是一个 4 维向量，其中 $x_i=(x_{1i},x_{2i})$ 是 i 的消费向量. 但市场出清条件 $x_1+x_2=\bar{\omega}$ 使得 x_1，x_2 相互惟一确定，这就可能用一个二维区域来表示所有的可行配置，著名的 Edgeworth 盒正是这样一种几何模型. 取一个边长为 $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$ 的矩形，以其相对的一对顶点 0_1，0_2 为坐标原点、以矩形的边为坐标轴，导入两个互相关联的坐标系（如图 4-4）. 矩形内每点

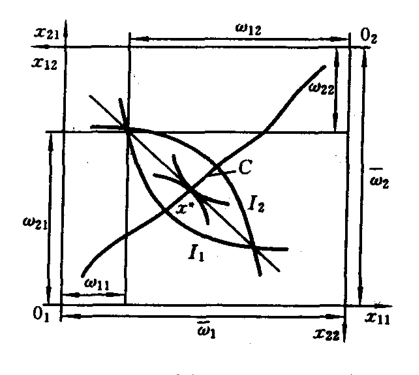


图 4-4

正好对应一个可行配置 $x=(x_1,x_2)$，x_1，x_2 分别为该点在两个坐标中所表示的向量，就以同一字母 x 记所述的点. 特别，$\omega=(\omega_1,\omega_2)$ 表示矩形内一点，称为禀赋点. 所作的矩形称为 Edgeworth 盒. 原则上，所述二人消费模型的所有结论都可用 Edgeworth 盒内的适当几何事实表示出来. 特别，本章的主要概念：Pareto 最优配置、核与 Walras 均衡，都有明显的几何图示，下面分别予以考

虑.

1. Pareto 集

由式(4-10),Edgeworth 盒内部一点 $x=(x_1,x_2)$是 Pareto 最优配置的充要条件是:$\nabla u_1(x_1)$与$\nabla u_2(x_2)$互相平行;而这又意味着,消费者 1,2 过点 x 的无差别曲线在 x 相切. 注意,关于$\succcurlyeq_i(i=1,2)$的假设保证分别属于 1 与 2 的两条无差别曲线至多有一个切点. 这种切点之全体就构成 Pareto 集,它通常是 Edgeworth 盒内一条从左下向右上倾斜的曲线(如图 4-4).

2. 核

以 C 记所述经济的核. 由命题 4.5,C 含于 Pareto 集. 给定 Pareto 最优配置 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$. 由定义 4.3,$\bar{x}\in C$ 的充要条件是消费者 1 与 2 都不可能改进 $\bar{x}$. 过禀赋点 ω 作 1 与 2 的无差别曲线 I_1 与 I_2. 若 $\bar{x}$在 I_1 的左下方,则从 $\bar{x}$出发沿 1 的无差别曲线移动必可到达矩形$\{x_1: 0\leqslant x_1\leqslant\omega_1\}$内部,因此(用$\succcurlyeq_1$ 的强单调性),必有 $x_1\leqslant\omega_1$,使 $x_1\succ_1\bar{x}_1$,从而 1 改进 $\bar{x}$. 同理,若 $\bar{x}$在 I_2 的右上方,则 2 能改进 $\bar{x}$;若 $\bar{x}$介于 I_1 与 I_2 之间,则 1 与 2 都不能改进 $\bar{x}$. 这就得出结论:C 是 Pareto 集介于 I_1 与 I_2 之间的那一段,它通常称为契约曲线(如图 4-4 中用加粗曲线段表示)."契约"意味着只有属于 C 的配置才可能使消费者达成交易协议.

3. Walras 均衡

给定 $p\in\mathbf{R}^2_{++}$与可行配置 $x^*=(x_1^*,x_2^*)$. 首先,由命题 4.5,(x^*,p)为 Walras 均衡的必要条件是 $x^*\in C$. 其次,由定义 4.1,(x^*,p)为 Walras 均衡的充要条件是消费者 $i(=1,2)$在预算约束 $p\cdot x_i\leqslant p\cdot\omega_i$ 下以消费向量 x_i^* 实现效用最大化;而这又意味着(用定理 2.2),i 的无差别曲线在点 x^* 与预算线 $p\cdot x_i=p\cdot\omega_i$ 相切. 假定 $x^*\neq\omega$,因而过点 x^* 与 ω 只有一条预算线,这就得出结论:$x^*\in C$ 是 Walras 均衡配置的充要条件是,连结 x^* 与 ω 的直线 L 在点 x^* 同时与 $i=1,2$ 的无差别曲线相切;L 必为预算线,其法

向量平行于均衡价格向量.

直观上,若变动价格向量 p,使预算线 $p\cdot x_i=p\cdot\omega_i$ 绕点 ω 旋转,当它恰与消费者 1,2 的无差别曲线同时相切于一点时,p 就是均衡价格向量,而切点(它必在 C 上)就是均衡配置.

任给 Pareto 最优配置 x^*,假定它在 Edgeworth 盒内部,则 $i=1,2$ 过点 x^* 的无差别曲线在 x^* 有公切线 L. 若 L 恰好通过禀赋点 ω,则 x^* 是一均衡配置. 若 ω 不在 L 上,则总可以通过一次性的财富重新分配,将 ω 调整为 ω',使 ω' 在 L 上,从而配置 x^* 依新的禀赋 ω' 是 Walras 均衡. 或者说,借助于财富转移,Pareto 最优配置总可以成为均衡配置,这正是第二基本福利定理的结论.

4.5.2 一消费者与一生产者经济

现在转向另一个高度虚拟的经济,其中仅有一个消费者与一个厂商,且该消费者是厂商的惟一所有者,同时也是厂商所能雇到的惟一工人! 不消说,从常规的思维看来,这样一个经济模型是高度不现实的,甚至可以说是完全怪诞的. 但如同两消费者模型一样,它对于解释一般的理论结论亦不失为有用. 而且,在经济学家看来,模型中的消费者与生产者可理解为代表消费者与代表生产者,因而未必不具有现实性.

设消费者消费两种商品:休闲 1 与消费品 2,以 $x=(x_1,x_2)$ 记一个消费向量. 消费者的禀赋为 $(\overline{L},0)$,这意味着消费者最多拥有休闲时间 $\overline{L}$(如每天 24 小时),而没有库存消费品. 假设消费者有可微效用函数 $u(\cdot)$,它表示一个强单调的凸偏好 $\succcurlyeq$. 厂商以工资 w 从消费者购得劳务 z,依生产函数 $f(\cdot)$ 生产出消费品 $q=f(z)$,然后以价格 p 卖给其惟一雇员,即消费者. 假定 $f(\cdot)$ 是严格凹的增函数.

如同两消费者模型一样,现在这个两人模型的可行配置形式上也是一个 4 维向量:$(x_1,x_2,-z,q)$,但它必须满足市场出清条件

$$x_1 + z = \overline{L}, \quad x_2 = q \tag{4-52}$$

因而消费向量(x_1, x_2)与生产向量$(-z, q)$相互惟一确定.颇类似于4.5.1小节中的作法,现在用一宽为$\overline{L}$的半无限矩形来表示可行配置.以矩形的两个角点0_c与0_f作为坐标原点,以矩形的边为坐标轴,引入两个坐标系(如图4-5).矩形域内任一点在两个坐标系中的坐标分别为(x_1, x_2)与$(x_1-\overline{L}, x_2)$,下面约定以x记点(x_1, x_2),同时也就以它记可行配置$(x_1, x_2, -z, q)$.基本的问题是,如何用矩形域内适当的几何关系来解释本章的主要概念:Pareto最优配置与Walras均衡.下面分别予以考虑.

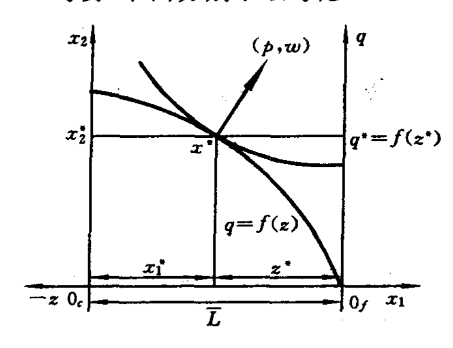


图 4-5

1. Pareto **最优配置**

令

$$F(-z, q) = q - f(z).$$

由3.1节式(3-2),厂商的生产集可表为

$$Y = \{(-z, q): F(-z, q) \leqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

设$x = (x_1, x_2, -z, q)$是一可行配置.由4.1节式(4-10a),x是Pareto最优配置的充要条件是

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial F(-z, q)}{\partial(-z)} \Big/ \frac{\partial F(-z, q)}{\partial q} = f'(z) \tag{4-53}$$

且$F(-z, q) = 0$,即$q = f(z)$.在几何上,这意味着曲线$q = f(z)$与

消费者的无差别曲线在点 x 相切. 因$\succcurlyeq$是凸性的, $f(\cdot)$是严格凹的, 上述两曲线至多在一点相切, 因而至多存在一个 Pareto 最优配置.

2. Walras 均衡

给定价格向量$(w,p)\gg 0$与可行配置 $x^*=(x_1^*,x_2^*,-z^*,q^*)$. 结合定义 4.1 与 2.1.2、3.2.4 小节得出: (x^*,w,p)是 Walras 均衡的充要条件是

$$\begin{cases} z^* = z(p,w); & (4\text{-}54)\\ x_i^* \in x_i(p,pq^*), \quad i=1,2; & (4\text{-}55)\\ x_1^* + z^* = \overline{L}, \quad q^* = f(z^*) = x_2^*. & (4\text{-}56)\end{cases}$$

注意消费者的收入由工资 wx_1^* 与利润 $pq^*-wx_1^*$ 这两部分组成, 因而其总收入为 pq^*. 不妨只考虑 $0<x_1^*<\overline{L}, x_2^*>0$ 的情况. 由定理 3.1、式(4-54)成立的充要条件是

$$pf'(z^*)=w. \tag{4-57}$$

由定理 2.2(参见式(2-10))、式(4-55)成立的充要条件是

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}=\frac{w}{p}. \tag{4-58}$$

综合式(4-57)、(4-58)得出结论: (x^*,w,p)是 Walras 均衡的充要条件是, 曲线 $q=f(z)$与消费者的无差别曲线在点 x^* 相切, 且二曲线在点 x^* 的法向量就是价格向量(w,p). 由此特别推出: Walras 均衡配置必为 Pareto 最优配置.

4.5.3 两生产者经济

现在考虑两人经济的最后一种类型——两生产者经济. 设仅有的厂商 $j=1,2$ 在要素市场上依价格 $w=(w_1,w_2)$购得要素 $z_j=(z_{1j},z_{2j})\in \mathbf{R}_+^2$ 作为其生产投入(要素 1,2 可分别看做劳务与资本), 然后依生产函数 $q_j=f_j(z_j)$生产出产品 j, 并在世界市场上依价格 p_j 出售其产品. 这一经济涉及两种投入与两种产品, 因而通常称为 2×2 生产模型. 在这个模型中, 厂商不至于大到足以影响

世界市场，因而可设 $p=(p_1,p_2)\gg 0$ 在以下讨论中保持不变. 另一方面，假定要素的基数 $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\gg 0$，它既不可能得到补充，亦不可能用于消费，因而厂商的要素配置 $z=(z_1,z_2)$ 服从于市场出清条件 $z_1+z_2=\bar{z}$；而且，要素价格 w 也必定由 $j=1,2$ 的竞争决定. 因产出 q_j 及收益 p_jq_j 等完全决定于投入 z_j，故仅需考虑要素市场. 假定 $f_j(\cdot)\in C^2$ 且是严格单调增的凹函数；为达到更强的结论，进而要求 $f_j(\cdot)$ 是 1 次齐次的.

一个可行的要素配置 $z=(z_1,z_2)$ 满足 $z_1+z_2=\bar{z}$，这一事实立即使我们联想到由等式 $x_1+x_2=\bar{\omega}$ 决定的可行消费配置，而这就可将在 4.5.1 小节中十分有效的 Edgeworth 盒派上用场. 现在的 Edgeworth 盒边长为 $\bar{z}_1,\bar{z}_2$，其中每个点 z 表示一个可行配置 $z=(z_1,z_2)$（如图 4-6）. 基本的问题仍然是：如何用 Edgeworth 盒中的几何关系解释 Pareto 最优配置与 Walras 均衡概念？下面分别予以考虑.

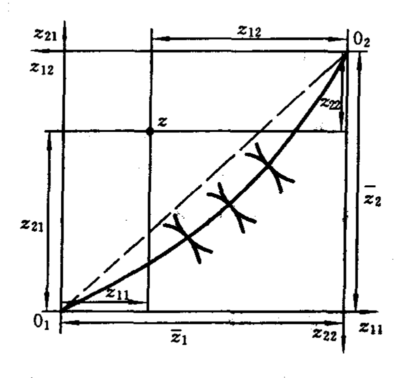


图 4-6

1. Pareto 集

这个模型中没有消费者，因而不能直接套用 4.1 节中关于 Pareto 最优配置的定义. 不过，厂商 j 消耗要素 z_j 获得收益 $p_jf_j(z_j)$，实质上与“消费 z_j 获得效用 $f_j(z_j)$”并无区别，因而不妨

将$f_j(\cdot)$视为效用函数，这就使 Pareto 最优配置获得自然的意义. 于是直接利用 4.5.1 小节中的现成结论得出：Pareto 最优配置正是两厂商的等产量曲线（相当于 4.5.1 小节中的无差别曲线）的相切点，这些点连成一条曲线如图 4-6 所示，它就是 Pareto 集.

比 4.5.1 小节更进一步的结论是：在 Edgeworth 盒内部，Pareto 集不可能与对角线相交，除非它与对角线重合. 事实上，对角线上一内点属于 Pareto 集意味着，存在 $t_0 \in (0,1)$ 与常数 β，使得

$$\nabla f_1(t_0\bar{z}) = \beta \nabla f_2(t_0'\bar{z}) \quad (t_0' = 1 - t_0). \qquad (4\text{-}59)$$

由 $f_j(\cdot)$ 的齐次性有 $f_j(tz) = tf_j(z)(\forall\ t > 0)$；此等式两边对 t 微分两次得

$$\nabla f_j(tz) \cdot z = f_j(z), \qquad (4\text{-}60)$$

$$z^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_j(tz) z = 0 \qquad (t > 0, j = 1,2). \qquad (4\text{-}61)$$

因 $f_j(\cdot)$ 是凹函数，故 $\nabla^2 f_j(tz)$ 负半定，于是用线性代数方法不难从式(4-61)推出

$$\nabla^2 f_j(tz) z = 0 \quad (t > 0, j = 1,2). \qquad (4\text{-}62)$$

今证式(4-59)推出对角线上每点属于 Pareto 集，为此只需说明

$$\nabla f_1(t\bar{z}) = \beta \nabla f_2(t'\bar{z}) \quad (0 < t < 1). \qquad (4\text{-}63)$$

令 $\varphi(t) = \nabla f_1(t\bar{z}) - \beta \nabla f_2(t'\bar{z})$，则

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \nabla^2 f_1(t\bar{z})\bar{z} + \beta \nabla^2 f_2(t'\bar{z})\bar{z} \\ &= 0, \qquad (\text{用式(4-62)}) \end{aligned}$$

故 $\varphi(t) = \varphi(t_0) = 0(0 < t < 1)$，这正表明式(4-63)成立.

2. Walras 均衡

给定可行配置 $z^* = (z_1^*, z_2^*) \gg 0$ 与价格向量 $w^* = (w_1^*, w_2^*) \gg 0$，由定义 4.1、$(z^*, w^*)$，Walras 均衡的充要条件为，$z_j^*$ 是 $j(=1,2)$的利润最大化投入，即

$$z_j^* \in z_j(p_j, w^*), \quad j = 1,2, \qquad (4\text{-}64)$$

其中，$z_j(\cdot,\cdot)$是 j 的要素需求函数（参见 3.2.4 小节）. 由定理

3.1、条件(4-64)等价于

$$p_j \nabla f_j(z_j^*) = w^*, \quad j = 1,2. \tag{4-65}$$

几何上,式(4-65)表明当 z^* 是均衡配置时,两厂商的等产量曲线在点 z^* 相切(因而 z^* 属于 Pareto 集),且以 w^* 为公共法向量.

下面设 $z_j(w,q_j)$ 与 $c_j(w,q_j)$ 分别为厂商 j 的条件要素需求函数与成本函数(参见 3.3.1 小节). 由 $f_j(\cdot)$ 的齐次性不难推出,$z_j(w,q_j)$ 与 $c_j(w,q_j)$ 对 q_j 都是 1 次齐次的(参看例 2.2). 约定 $a_j(w)=z_j(w,1)$, $c_j(w)=c_j(w,1)$. 若 (z^*,w^*) 是 Walras 均衡,则

$$\begin{aligned}
p_j q_j^* = p_j f_j(z_j^*) &= p_j \nabla f_j(z_j^*) \cdot z_j^* \quad (\text{用式(4-60)}) \\
&= w^* \cdot z_j^* \quad (\text{用式(4-65)}) \\
&= c_j(w^*, q_j^*) \quad (\text{用式(4-64)与式(3-21)}) \\
&= q_j^* c_j(w^*,1) = q_j^* c_j(w^*),
\end{aligned}$$

这就得到

$$p_j = c_j(w^*), \quad j = 1,2. \tag{4-66}$$

式(4-66)表明,在均衡配置下,单位产品的最低成本等于其市场价格,因而每个厂商得到零利润. 注意要素的均衡价格仅决定于两厂商的技术与产品价格,而与 $\bar{z}$ 无关,这一结论通常称为要素价格均等化定理.

在函数 $c_j(\cdot)$ 为已知的情况下,方程组(4-66)可用来解出均衡价格 $w^*=(w_1^*,w_2^*)$. 一旦 w^* 已确定,则可依以下方法求得均衡配置 z_j^*:首先注意

$$z_j^* = z_j(w^*, q_j^*) = q_j^* a_j(w^*),$$

因而

$$\frac{z_{1j}^*}{z_{2j}^*} = \frac{a_{1j}(w^*)}{a_{2j}(w^*)} \quad (j = 1,2); \tag{4-67}$$

将式(4-67)与 $z_1^* + z_2^* = \bar{z}$ 联立,即可解出 z_1^*, z_2^*.

几何上很明显,均衡配置在对角线右下方的充要条件是

$$\frac{z_{11}^*}{z_{21}^*} > \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \tag{4-68}$$

或等价地

$$\frac{z_{12}^*}{z_{22}^*} < \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \tag{4-69}$$

利用式(4-67)～(4-69)不难推出，若

$$\frac{a_{11}(w)}{a_{21}(w)} > \frac{a_{12}(w)}{a_{22}(w)} \quad (w \gg 0), \tag{4-70}$$

则均衡配置必在对角线的右下方．式(4-70)称为要素强度条件．

第五章　风险选择

前几章所作的分析应能使我们深信，个体选择是经济活动的基础．但对于每一个体选择的结局或后果，要么不予深究（如在第一章的一般选择理论中），要么认为是确定的（如第二～四章中所涉及的消费者选择或厂商选择），完全避开不确定性或风险．而在现实的经济活动中，大多数选择恰恰包含风险，因而不能没有专门分析风险的选择理论．

从概念上说，风险选择并未越出一般个体选择理论的框架之外．因此，仍然可循选择集、理性偏好、效用函数这样一些熟悉的概念展开风险选择理论．但仅靠第一章的那一点点概念构架无法铸造一个深入的理论．概念上的重大突破是期望效用的引进，它正是与风险选择的特殊结构相适应的，因而成为本章及其应用中的基本工具．

5.1　期望效用

5.1.1　彩票与偏好

个体在作出选择或决策时，常常不能确知其结局或后果，这无疑是人类的共同经验．例如，你选择某人代购车票，无论你如何委托，常常不能保证你得到的是卧铺票而不是座票；你在选购一种证券时，通常不能确切地预知一年后的收益．诸如此类的选择都包含

风险[①]，因而称为风险选择.

如同在通常的选择理论中一样，为研究风险选择，首要的问题是确定其选择集.在数学上，风险选择所面对的是随机变量，因而其选择集是由某些随机变量构成的集合 $\mathscr{L}$.个体在 $\mathscr{L}$ 中选择某个 L，如同购得一张具不确定性的彩票，因而就称 $\mathscr{L}$ 中的元素为彩票.为数学上便于分析，假定 $\mathscr{L}$ 对于凸组合封闭，即若 $L_k \in \mathscr{L}$，$\alpha_k \geqslant 0(1 \leqslant k \leqslant K)$，$\sum \alpha_k = 1$，则 $\sum \alpha_k L_k$ 有意义且 $\sum \alpha_k L_k \in \mathscr{L}$.满足以上条件的随机变量之集 $\mathscr{L}$ 称为一个彩票空间.两个典型的例子如下.

1. 单纯彩票

设 $\mathscr{L}$ 是取值 $n = 1,2,\cdots,N$ 的离散随机变量之全体，每个 $L \in \mathscr{L}$ 完全决定于其分布列 $(p_1,p_2,\cdots,p_N)$，其中 $p_n = \mathrm{Prob}(L = n)(1 \leqslant n \leqslant N)$，因而就写作 $L = (p_1,p_2,\cdots,p_N)$. $n = 1,2,\cdots,N$ 可解释为 N 个可能的状态，而 p_n 则是状态 n 出现的概率.例如，设 1,2 分别表示就业与入学，则 $L = (0.8,0.2)$ 表示有 0.8 的概率就业与 0.2 的概率入学.几何上，每个 $L \in \mathscr{L}$ 可看做 $N-1$ 维标准单纯形 $\Delta = \{p \in \mathbf{R}_+^N : \sum p_n = 1\}$ 上一点，因而称 $L \in \mathscr{L}$ 为单纯彩票. $\mathscr{L}$ 作为一个凸集，自然对凸组合封闭. $\mathscr{L}$ 的 N 个顶点 $e_1,e_2,\cdots,e_N$(即 $\mathbf{R}^N$ 的标准基)表示 N 个不包含风险的退化彩票.

2. 货币彩票

设 $\mathscr{L}$ 是取值于 $\mathbf{R}$ 上的随机变量之全体，每个 $L \in \mathscr{L}$ 完全决定于其分布函数 $F(x) = \mathrm{Prob}(L \leqslant x)$，通常就以 $F(\cdot)$ 表示 L，并称之为货币彩票.若个体选择 $F \in \mathscr{L}$，则其"货币"收益将在均值 $\bar{x} = \int x \mathrm{d}F(x)$[②]上下随机摆动，除非随机变量退化为确定地取值 $\bar{x}$

---

① 此处风险一词除了不确定性外，并无更多的含义.从另一种角度考虑，可以认为风险与不确定性并不完全相同，但在本章中不拟强调这一区别.

② 此处 $\int$ 是 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 的简写，下文中仿此.

的量，这意味着

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\bar{x};\\ 1, & x\geqslant\bar{x}.\end{cases}$$

下面以 $\delta_{\bar{x}}$ 记这个退化的货币彩票.

本章将主要针对如上两种彩票建立风险选择理论. 单纯彩票具有简单的几何表示，尤其适于作为解释理论的具体模型；货币彩票则对于金融证券理论等应用经济课题有特别重要的价值.

以下设 $\mathscr{L}$ 是一个给定的彩票空间，在未作明确说明时，可认定它是单纯彩票与货币彩票这两种情形之一，亦可以是更一般的情形. 如同对任何其他对象的选择一样，个体对彩票的选择亦根据他对彩票优劣顺序的某种判断，这意味着，个体在 $\mathscr{L}$ 上有各自的偏好. 以下设 $\succcurlyeq$ 是 $\mathscr{L}$ 上的一个理性偏好. 如在 1.1 节中所指出的，选择理论的深入展开依赖于对 $\succcurlyeq$ 的适当假设. 在目前的情况下，加于 $\succcurlyeq$ 的最重要的假设是如下所述的连续性与独立性公理.

定义 5.1 若对任给 $L_1,L_2,L\in\mathscr{L}$，集

$$\{\alpha\in[0,1]:\alpha L_1+\alpha' L_2\succcurlyeq L\}^{①}$$

与

$$\{\alpha\in[0,1]:L\succcurlyeq\alpha L_1+\alpha' L_2\}$$

均为闭集，则说 $\succcurlyeq$ 满足连续性公理，或简单地说 $\succcurlyeq$ 是连续的. 若对任给 $L_1,L_2,L\in\mathscr{L},\alpha\in(0,1)$，有

$$L_1\succcurlyeq L_2\Leftrightarrow\alpha L_1+\alpha' L\succcurlyeq\alpha L_2+\alpha' L,\tag{5-1}$$

则说 $\succcurlyeq$ 满足独立性公理，或简单地说 $\succcurlyeq$ 是独立的.

定义 5.1 中的连续性无疑类似于 1.1 节中所述的连续性（参见 1.1.2 小节 (P_5) 与命题 1.2）. 不同之处在于，此处避开了直接使用 $\mathscr{L}$ 中的极限概念. 独立性是更值得注意的假设，它在整个风险选择理论中处于中心地位. 在几何上，独立性意味着：$L_1\succcurlyeq L_2$ 等价于，对某个（所有）$L\in\mathscr{L}$，三角形 LL_1L_2 中某条（所有）平行于

---

① 请记住本书反复使用的约定 $\alpha'=1-\alpha$.

L_1L_2 的线段之两端有关系 $\succcurlyeq$（如图 5-1）. 注意，当 $\alpha \approx 0$ 时，$\alpha L_1 +$

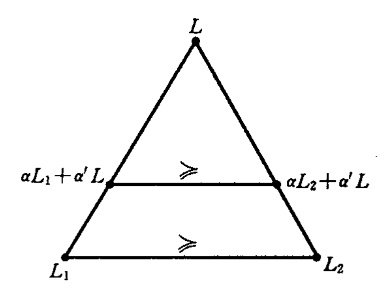


图 5-1

$\alpha' L$ 与 $\alpha L_2 + \alpha' L$ 都邻近 L. 这就表明，关系 $L_1 \succcurlyeq L_2$ 可在任何 $L \in \mathscr{L}$ 的邻近决定！这似乎是不可思议的，难以得到经验的支持. 但下面将看到，基于独立性公理的期望效用定理却能为常识所接受.

独立性公理有一些很强的推论.

命题 5.1 设 $\succcurlyeq$ 满足独立性公理，$L, L_k, M_k \in \mathscr{L}(k = 0,1,2,\cdots)$，$\alpha \in (0,1)$，则以下结论成立：

1° $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + \alpha' L \sim \alpha L_2 + \alpha' L$；$L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + \alpha' L \succ \alpha L_2 + \alpha' L$. 这意味着式(5-1) 中的 $\succcurlyeq$ 可改换成 $\sim$ 或 $\succ$.

2° 设 $\alpha_k \geqslant 0(1 \leqslant k \leqslant K)$，$\sum \alpha_k = 1$. 则 $L_k \succcurlyeq M_k(1 \leqslant k \leqslant K) \Rightarrow \sum \alpha_k L_k \succcurlyeq \sum \alpha_k M_k$，$L_k \sim M_k(1 \leqslant k \leqslant K) \Rightarrow \sum \alpha_k L_k \sim \sum \alpha_k M_k$. 若 $L_k \succcurlyeq M_k(1 \leqslant k \leqslant K)$，至少对一个 k 有 $L_k \succ M_k$，$\alpha_k > 0$，则 $\sum \alpha_k L_k \succ \sum \alpha_k M_k$.

3° 关于 $\succcurlyeq$ 的上围道集、下围道集与无差别集皆为凸集，因而 $\succcurlyeq$ 依 1.1.3 小节(P_6) 是凸性的.

4° $\succcurlyeq$ 依 1.1.3 小节(P_7) 是序保持的.

证 1° 直接由独立性的定义推出.

2° 关于“$\succcurlyeq$”的结论由归纳法得出；由此进而得出关于“$\sim$”的结论. 为证关于“$\succ$”的结论，不妨设 $L_1 \succ M_1$，$0 < \alpha_1 < 1$，则

$$\sum_k \alpha_k L_k = \alpha_1 L_1 + \alpha_1' \sum_{k>1} \beta_k L_k \qquad (\beta_k \doteq \alpha_k/\alpha_1')$$

$$\succ \alpha_1 M_1 + \alpha_1' \sum_{k>1} \beta_k L_k \qquad (\text{用 } 1°)$$

$$\succcurlyeq \alpha_1 M_1 + \alpha_1' \sum_{k>1} \beta_k M_k = \sum_k \alpha_k M_k.$$

3° 是 2°的直接推论.

4° 设 $L_1 \succ L_0, L_\beta = \beta L_1 + \beta' L_0$. 若 $1 \geqslant \beta > \gamma \geqslant 0, \beta - \gamma < 1$,令 $\delta = \gamma/(1-\beta+\gamma)$,则

$$L_\beta = (\beta-\gamma)L_1 + (1-\beta+\gamma)L_\delta$$

$$\succ (\beta-\gamma)L_0 + (1-\beta+\gamma)L_\delta = L_\gamma. \qquad \square$$

5.1.2 期望效用

设$\succcurlyeq$是彩票空间 $\mathscr{L}$ 上的给定理性偏好.

定义 5.2 若$\succcurlyeq$的一个效用表示 $U(\cdot)$ 满足恒等式

$$U(\alpha L + \alpha' L_1) = \alpha U(L) + \alpha' U(L_1). \tag{5-2}$$

其中, $L, L_1 \in \mathscr{L}, \alpha \in [0,1]$,则称 $U(\cdot)$ 为$\succcurlyeq$的期望效用函数(即所谓 Neumann-Morgenstern 期望效用函数,简称为 N-M 效用).

用归纳法,容易将恒等式(5-2)推广为

$$U\Big(\sum_k \alpha_k L_k\Big) = \sum_k \alpha_k U(L_k), \tag{5-3}$$

其中 $\sum \alpha_k L_k$ 是$\{L_k\} \subset \mathscr{L}$ 的任一凸组合. 式(5-2) 与式(5-3) 表明, $U(\cdot)$ 是线性函数. 在特殊情况下,可求得 $U(\cdot)$ 的明显的线性表达式. 下面考虑单纯彩票与货币彩票这两种最重要的情况.

首先设 $\mathscr{L}$ 是单纯彩票之空间. 每个 $L \in \mathscr{L}$ 可惟一地表成

$$L = (p_1, p_2, \cdots, p_N) = \sum_n p_n e_n,$$

其中,$\{e_n\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的顶点集. 若 $U(\cdot)$ 是一个期望效用函数,令 $u_n = U(e_n)$,则由式(5-3) 有

$$U(L) = \sum_n p_n U(e_n) = \sum_n p_n u_n. \tag{5-4}$$

式(5-4)表明$U(L)$正是$u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)$关于分布L的期望值. 反之,任意取定$u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)\in\mathbf{R}^N$,依式(5-4)定义的$U(L)(L\in\mathscr{L})$必定满足恒等式(5-2),因而是$\mathscr{L}$上某个偏好的期望效用函数.

其次,设$\mathscr{L}$是货币彩票之空间,$\mathscr{L}$中的收敛理解为分布收敛,即$F_k\to F\Leftrightarrow$在分布函数$F_k(\cdot),F(\cdot)$的连续点x处有$F_k(x)\to F(x)(k\to\infty)$. 设$U(\cdot)$是$\succcurlyeq$的连续期望效用函数,令$u(x)=U(\delta_x)$. 若$x_k\to x$,则$\delta_{x_k}\to\delta_x$,从而$u(x_k)\to u(x)(k\to\infty)$,故$u(\cdot)$连续. 任给$F\in\mathscr{L}$,取$x_{ki}\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n_k),\alpha_{ki}\geqslant 0,\sum_i\alpha_{ki}=1$,使$\sum_i\alpha_{ki}\delta_{x_{ki}}$分布收敛于$F$,则

$$\begin{aligned}U(F)&=\lim_k U\Big(\sum_i\alpha_{ki}\delta_{x_{ki}}\Big)\\&=\lim_k\sum_i\alpha_{ki}u(x_{ki})\\&=\int u(x)\mathrm{d}F(x).\end{aligned}\tag{5-5}$$

式(5-5)表明,$U(F)$原来是$u(x)$关于分布F的期望值. $u(\cdot)$称为偏好$\succcurlyeq$的 Bernoulli 效用函数.

下面就是著名的期望效用定理,它是本节的中心结果.

定理 5.1 设$\succcurlyeq$是$\mathscr{L}$上的理性偏好. 则$\succcurlyeq$有期望效用表示当且仅当$\succcurlyeq$满足连续性公理与独立性公理;$\succcurlyeq$的任何两个期望效用表示可通过一个线性增函数互相变换.

证 从期望效用表示存在推出$\succcurlyeq$的连续性与独立性是平凡的. 下面设$\succcurlyeq$满足连续性与独立性公理,证期望效用存在. 为简单起见,假定存在$\underline{L},\bar{L}\in\mathscr{L}$,使$\bar{L}\succcurlyeq L\succcurlyeq\underline{L}(\forall L\in\mathscr{L})$. 对于单纯彩票的情况,这样的$\underline{L},\bar{L}$存在是不难证明的. 不妨设$\bar{L}\succ\underline{L}$. 以下的证明分为 3 步.

1° 定义函数$U(\cdot)$. 约定$L_\alpha=\alpha\bar{L}+\alpha'\underline{L}(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$. 定义

$$U(L)=\sup\{\alpha\in[0,1]:L\succcurlyeq L_\alpha\},\quad L\in\mathscr{L}.\tag{5-6}$$

因恒有 $L \succcurlyeq \underline{L} = L_0$，故 $U(L)$ 依式(5-6)有定义，且 $0 \leqslant U(L) \leqslant 1$. 利用式(5-6)与连续性公理易推出

$$L \succcurlyeq U(L)\overline{L} + [1 - U(L)]\underline{L} = L_{U(L)}.$$

若 $U(L) < \alpha \leqslant 1$，则 $L_\alpha \succ L$. 令 $\alpha \to U(L)$ 并用连续性公理得 $L_{U(L)} \succcurlyeq L$. 这就得到基本的关系

$$L \sim L_{U(L)} \quad (\forall\, L \in \mathscr{L}). \tag{5-7}$$

结合式(5-7)与 $\succcurlyeq$ 的序保持性(命题 5.1 之 4°)，易得出

$$L \succcurlyeq L' \Leftrightarrow U(L) \geqslant U(L') \quad (L, L' \in \mathscr{L}),$$

可见 $U(\cdot)$ 是 $\succcurlyeq$ 的效用表示.

2° 验证等式(5-2). 设 $L, L_1 \in \mathscr{L}$，$\alpha \in [0,1]$，由式(5-7)与命题 5.1 有

$$\alpha L + \alpha' L_1 \sim \alpha L_{U(L)} + \alpha' L_{U(L_1)} = L_\beta,$$

其中，$\beta = \alpha U(L) + \alpha' U(L_1)$. 再用式(5-7)得 $\beta = U(\alpha L + \alpha' L_1)$，这正表明式(5-2)成立. 至此，已知 $U(\cdot)$ 为 $\succcurlyeq$ 的期望效用表示.

3° 若 V 是 $\succcurlyeq$ 的另一个期望效用表示，则由式(5-7)有

$$\begin{aligned} V(L) = V(L_{U(L)}) &= U(L)V(\overline{L}) + [1 - U(L)]V(\underline{L}) \\ &= [V(\overline{L}) - V(\underline{L})]U(L) + V(\underline{L}) \\ &\triangleq \alpha U(L) + \beta, \end{aligned}$$

其中，α, β 是常数且 $\alpha > 0$. 这表明 $V(\cdot)$ 可通过线性增函数从 $U(\cdot)$ 变换出来. □

定理 5.1 为运用期望效用提供了依据. 有很强的理由促使人们普遍采用期望效用. 首先是它在分析上有明显的优势. 其次是它似乎符合人们的直觉：人们相信，选择 $L = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ 的效用正是选择 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ 的效用 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 的加权平均，而权数自然是 e_n 出现的概率 $p_n(1 \leqslant n \leqslant N)$，这就是期望效用公式(5-4). 于是人们相信，期望效用的存在性应不成问题. 而由定理 5.1，这就意味着应当接受独立性公理. 但一个令人震惊的反例却对此提出了挑战.

例 5.1 (Allais 悖论,1953)　设奖金 1,2,3 分别为 250,50,0,

$L_1 = (0,1,0)$,　　　　$L_2 = (0.1,0.89,0.01)$,

$L_3 = (0.1,0,0.9)$,　　　　$L_4 = (0,0.11,0.89)$.

从常识来看,明显地有 $L_1 \succ L_2$(宁愿保险地拿到 50 元,而不愿仅以 0.1 的概率去获得 250 元),$L_3 \succ L_4$(以 0.1 的概率获得 250 元自然胜过以 0.11 的概率拿到 50 元). 如果这样的偏好有期望效用表示 $U(L) = \sum p_n u_n$,则

$$u_2 = U(L_1) > U(L_2) = 0.1u_1 + 0.89u_2 + 0.01u_3;$$

$$0.1u_1 + 0.9u_3 = U(L_3) > U(L_4) = 0.11u_2 + 0.89u_3.$$

但以上两式明显地互相矛盾.

5.1.3　状态依存效用

前面对彩票 $L \in \mathscr{L}$ 的讨论并未涉及其不确定结局的原因. 更深入的分析要追溯到影响 L 的更里层的因素. 实际上,L 常常依赖于某些随机地出现的状态. 为确定起见,下面取定一个有限的状态空间 $S = \{1,2,\cdots,S\}$,每个状态 s 出现的概率为 $p_s > 0$,$\sum p_s = 1$. 任给函数 $g(\cdot): S \to \mathbf{R}$,令

$$F(x) = \mathrm{Prob}(g \leqslant x) = \sum_{g(s)\leqslant x} p_s, \tag{5-8}$$

则 $F(\cdot)$ 是一个货币彩票,它完全由 $g(\cdot)$ 决定. 另一方面,给出一个 $g(\cdot): S \to \mathbf{R}$ 显然相当于给出 $\mathbf{R}^S$ 中一点

$$(x_1,x_2,\cdots,x_s), x_s = g(s) \quad (1 \leqslant s \leqslant S).$$

相应地,由式(5-8)表示的 $F(\cdot)$ 可改写成

$$F(x) = \sum_{x_s\leqslant x} p_s, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{5-9}$$

但须注意,同一 $F(\cdot)$ 可能由 $\mathbf{R}^S$ 中不同的点生成. 因此,将 $(x_s) \in \mathbf{R}^S$ 转化为 $F(\cdot)$ 的过程已损失掉一部分信息.

设 $\succcurlyeq$ 是 $\mathbf{R}^S$ 上的一个偏好. 若 $\succcurlyeq$ 的一个效用表示 $U(\cdot)$ 可表成

$$U(x) = \sum_s p_s u_s(x_s), \quad x = (x_s) \in \mathbf{R}^S, \tag{5-10}$$

其中，$u_s(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}(1\leqslant s\leqslant S)$ 是给定的，则称 $U(\cdot)$ 为 $\succcurlyeq$ 的广义期望效用函数.

为得到一个广义期望效用表示存在的条件，将 $\mathbf{R}^S$ 嵌入到一个更大的彩票空间 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 由所有形如 $L=(F_1,\cdots,F_S)$ 的彩票组成，每个 $F_s(\cdot)$ 为随机变量 $x_s(1\leqslant s\leqslant S)$ 的分布函数，在退化情况下，x_s 是确定的，此时认定 $L=(x_1,\cdots,x_s)\in\mathbf{R}^S$. 完全如定义 5.1 一样，界定 $\mathscr{L}$ 上的理性偏好的连续性与独立性，然后可以建立定理 5.1 的如下推广.

定理 5.2(广义期望效用定理)　若 $\mathscr{L}$ 上的理性偏好 $\succcurlyeq$ 满足连续性与独立性公理，则存在效用函数 $u_s(\cdot)(s\in S)$，使得

$$U(L)=\sum_s\int u_s(x)\mathrm{d}F_s(x) \tag{5-11}$$

是$\succcurlyeq$的效用表示，其中 $L=(F_1,\cdots,F_S)\in\mathscr{L}$.

若 $L=(x_1,x_2,\cdots,x_S)\in\mathbf{R}^S$，则式(5-11) 简化成

$$U(L)=\sum_s u_s(x_s)=\sum_s p_s\tilde{u}_s(x_s),$$

其中，$\tilde{u}_s(\cdot)=p_s^{-1}u_s(\cdot)$ 相当于式(5-11) 中的 $u_s(\cdot)$.

5.2 风险厌恶

本节考察选择者对风险的态度，为此而引进的风险厌恶概念，在涉及风险的经济分析中被广泛使用.

以下设 $\mathscr{L}$ 是货币彩票之空间，写出 $F\in\mathscr{L}$ 时，意味着 F 是某个货币彩票的分布函数. 设已给定 $\mathscr{L}$ 上的理性偏好 $\succcurlyeq$，它有一个期望效用表示

$$U(F)=\int u(x)\mathrm{d}F(x),\quad F\in\mathscr{L}, \tag{5-12}$$

其中，Bernoulli 效用函数 $u(\cdot)$ 满足 $u'(\cdot)>0$，因而 $u(\cdot)$ 与其反函数 $u^{-1}(\cdot)$ 均严格单调增.

5.2.1 风险厌恶的刻画

风险厌恶是选择者的这样一种倾向:他宁可保险地获得某一平均收益 $\bar{x}$,而不愿为争取可能超过 $\bar{x}$ 的收益而冒险.准确的定义如下.

定义 5.3 任给 $F \in \mathscr{L}$,约定

$$F_c = \delta_\mu, \quad \mu = \mu_F = \int x \mathrm{d}F(x). \tag{5-13}$$

若 $\forall\, F \in \mathscr{L}$,有 $F_c \succcurlyeq F$,则说 $\succcurlyeq$(或选择者)是风险厌恶的;若 $\forall\, F \in \mathscr{L}$,有 $F_c \succ F$,除非 $F_c = F$,则说 $\succcurlyeq$ 是严格风险厌恶的;若 $\forall\, F \in \mathscr{L}$,有 $F_c \sim F$,则说 $\succcurlyeq$ 是风险中性的.

为从各个不同角度刻画风险厌恶,再引入与之相关的两个概念.任给 $F \in \mathscr{L}, x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$,令

$$c(F) = u^{-1}\left(\int u(x)\mathrm{d}F(x)\right); \tag{5-14}$$

$$\pi(x,\varepsilon) = \frac{u(x) - (1/2)[u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon)]}{u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon)}. \tag{5-15}$$

以上两式都与 u 有关,必要时也写作 $c(F,u)$ 与 $\pi(x,\varepsilon,u)$.注意式(5-14)等价于

$$u(c(F)) = U(F), \quad \forall\, F \in \mathscr{L}. \tag{5-16}$$

而式(5-16)又相当于 $\delta_{c(F)} \sim F$,即确定地得到收益 $c(F)$ 与选择彩票 F 无差别,因而称 $c(F)$ 为 F 的确定性等价.$\pi(x,\varepsilon)$ 可解释为图 5-2 中线段 CD 与线段 AB 之比,它显然量度了函数 $u(\cdot)$ 的凹性,称为概率溢价.

以下命题给出风险厌恶的几种等价刻画.

命题 5.2 以下条件互相等价:

1° $\succcurlyeq$ 是风险厌恶的;

2° $u(\cdot)$ 是凹函数;

3° $c(F) \leqslant \mu_F (\forall\, F \in \mathscr{L})$,$\mu_F$ 依式(5-13);

4° $\pi(x,\varepsilon) \geqslant 0 (\forall\, x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0)$.

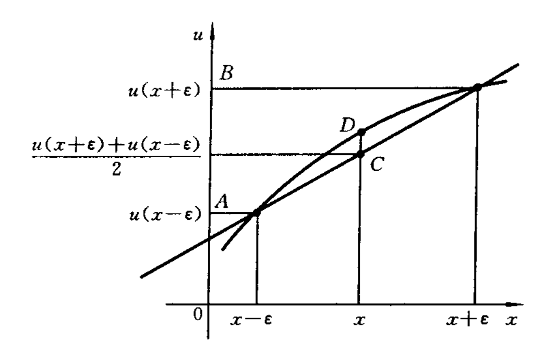


图 5-2

此外，$\succcurlyeq$ 是严格风险厌恶的 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是严格凹函数；$\succcurlyeq$ 是风险中性的 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是线性函数 $\Leftrightarrow c(F) = \mu_F (\forall\, F \in \mathscr{L})$.

证 $\forall\, F \in \mathscr{L}$，有 $U(F_c) = u(\mu_F)$，因此 $F_c \succcurlyeq F$ 相当于

$$u\left(\int x \mathrm{d}F(x)\right) \geqslant \int u(x) \mathrm{d}F(x). \tag{5-17}$$

另一方面，$u(\cdot)$ 为凹函数的充要条件为(所谓 Jensen 不等式)

$$u\left(\sum_k \alpha_k x_k\right) \geqslant \sum_k \alpha_k u(x_k), \tag{5-18}$$

其中，$\sum \alpha_k x_k$ 是实数组 $\{x_k\}$ 的任一凸组合；$u(\cdot)$ 严格凹的充要条件是式(5-18)为严格不等式，除非 $\sum \alpha_k x_k$ 重合于某点 x_k. 注意到 $u(\cdot)$ 连续，对照式(5-17)、(5-18)得出 1°⇔2°. 类似地得到定理中关于严格风险厌恶与风险中性的结论.

因 $u(\cdot)$ 单调增，直接看出式(5-17)$\Leftrightarrow \mu_F \geqslant c(F)$，这得出 1°⇔3°. 其次，因 $u(\cdot)$ 连续，故 $u(\cdot)$ 为凹函数的充要条件是

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{u(x)+u(y)}{2}, \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}.$$

与式(5-15)对照看出，以上不等式等价于 $\pi(x, \varepsilon) \geqslant 0 (\forall\, x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0)$，这表明 2°⇔4°. 因此命题得证. □

5.2.2 风险厌恶的测定

在上段中只是定性地刻画了厌恶风险的倾向，现在则要定量地测定厌恶风险的程度. 直观上，风险厌恶的程度与函数 $u(\cdot)$ 凹的程度有关，因而其定量测定必涉及 $u''(\cdot)$，故下面假定 $u(\cdot) \in C^2$. 利用 $u''(\cdot)$ 可定义出两个量度风险厌恶的数量指标.

定义 5.4 对任给 $x \in \mathbf{R}$，令

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}. \tag{5-19}$$

两者分别称为绝对风险厌恶系数与相对风险厌恶系数，前者也称为 Arrow-Pratt 系数. 当需要指明对 u 的依赖时将 $r_A(x)$ 与 $r_R(x)$ 分别写作 $r_A(x,u)$ 与 $r_R(x,u)$.

对上述定义须作几点说明.

1° 若 $v = \alpha u + \beta$，α，β 是常数且 $\alpha > 0$，则显然 $r_A(x,u) = r_A(x,v)$，$r_R(x,u) = r_R(x,v)$. 这就表明，$r_A(x)$ 与 $r_R(x)$ 实际上完全决定于 $\succcurlyeq$ 而与其期望效用表示的选择无关(参见定理 5.2). 由此也看出，定义式(5-19) 中分母 $u'(x)$ 的作用正在于消除所选取 $u(\cdot)$ 的特殊性.

2° 若已知 $r_A(x)$ 或 $r_R(x)$，则利用式(5-19) 积分两次即得出 $u(x)$. 这就表明，$r_A(x)$ 或 $r_R(x)$ 完全确定了偏好 $\succcurlyeq$，从而完全刻画了选择者的选择行为. 例如，若 $r_R(x) \equiv \sigma = \text{const}$，则由式(5-19) 有

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{\sigma}{x}.$$

积分一次得

$$\ln u'(x) = -\sigma \ln|x| + \ln \alpha,$$

其中，$\ln \alpha$ 是积分常数，$\alpha > 0$. 若限于考虑 $x > 0$，则 $u'(x) = \alpha x^{-\sigma}$. 再积分一次得

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta, & \sigma \neq 1; \\ \alpha \ln x + \beta, & \sigma = 1. \end{cases}$$

常数 $\alpha(>0)$，β 的存在恰好说明了 $\succcurlyeq$ 的期望效用表示容许一个严格增加的线性函数变换.

利用式(5-15)可导出 $r_A(x)$ 的一个有趣表达式. 将式(5-15)写成

$$2\pi(x,\varepsilon)[u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon)]$$
$$= 2u(x) - u(x+\varepsilon) - u(x-\varepsilon).$$

上式两边对 ε 求导两次后置 $\varepsilon = 0$，得

$$8\pi_\varepsilon{}'(x,0)u'(x) = -2u''(x);$$

与式(5-19)对照看出

$$\boxed{r_A(x) = 4\pi_\varepsilon{}'(x,0)} \qquad (5\text{-}20)$$

利用风险厌恶系数，可比较不同个体的风险厌恶程度.

命题 5.3(Pratt 定理)　设风险厌恶者 $i(=1,2)$ 以 $u_i(\cdot)$ 为 Bernoulli 效用函数，$u_i(\cdot) \in C^2$，$u_i{}'(\cdot) > 0$. 则以下条件互相等价：

1° $r_A(x,u_1) \leqslant r_A(x,u_2)(\forall\ x \in \mathbf{R})$；

2° $c(F,u_1) \geqslant c(F,u_2)(\forall\ F \in \mathscr{L})$；

3° $\pi(x,\varepsilon,u_1) \leqslant \pi(x,\varepsilon,u_2)(\forall\ x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0)$；

4° $u_2(\cdot) = \psi(u_1(\cdot))$，$\psi$ 是某个凹函数(这意味着 $u_2(\cdot)$ 比 $u_1(\cdot)$"更凹").

当以上条件满足时说 2 的风险厌恶甚于 1.

证　1°$\Leftrightarrow$4°. 令 $\psi(\cdot) = u_2(u_1^{-1}(\cdot))$，则 $u_2(\cdot) = \psi(u_1(\cdot))$，

$$\psi'(y) = u_2{}'(x)/u_1{}'(x) > 0 (y = u_1(x)).$$

对等式 $\psi'(y)u_1{}'(x) = u_2{}'(x)$ 微分一次，整理后得

$$r_A(x,u_1) - r_A(x,u_2) = \psi''(y)\,\frac{[u_1{}'(x)]^2}{u_2{}'(x)}.$$

这表明 $r_A(\cdot,u_1) \leqslant r_A(\cdot,u_2) \Leftrightarrow \psi''(\cdot) \leqslant 0 \Leftrightarrow \psi(\cdot)$ 为凹函数.

以上证明也说明了 4° 中的 ψ 至少在 $u_1(\mathbf{R})$ 上由 u_1, u_2 惟一决定.

$2°\Leftrightarrow 4°$. 仍设 $\psi(\cdot) = u_2(u_1^{-1}(\cdot))$. $\forall F \in \mathscr{L}$, 由式(5-14)有

$$c(F,u_1) \geqslant c(F,u_2) \Leftrightarrow u_1^{-1}\left(\int u_1(x)\mathrm{d}F(x)\right) \geqslant u_2^{-1}\left(\int u_2(x)\mathrm{d}F(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow \psi\left(\int u_1(x)\mathrm{d}F(x)\right) \geqslant \int \psi(u_1(x))\mathrm{d}F(x).$$

这表明 $2° \Leftrightarrow \psi(\cdot)$ 是凹函数, 亦即 $2° \Leftrightarrow 4°$.

$1°\Leftrightarrow 3°$. 用 L'Hopital 法则易从式(5-15)得 $\pi(x,0) = 0$. 于是当 3° 成立时有

$$\pi_\varepsilon'(x,0,u_1) \leqslant \pi_\varepsilon'(x,0,u_2) \quad (\forall\ x \in \mathbf{R});$$

然后利用式(5-20)得出 1° 成立. 这就证得 $3° \Rightarrow 1°$. $1° \Rightarrow 3°$ 的证明从略. □

5.2.3 应用举例

下面考虑 3 个例子, 用以解释风险厌恶概念的应用.

1. 保险问题

设一个严格风险厌恶的投保者原有财富为 w, 如遇不测, 有损失 D 元的风险, 其概率为 $p \in (0,1)$. 若他以价格 q 购买 α 单位保险, 则当损失发生时, 将可得 α 元赔偿. 设 $u(\cdot)$ 是 Bernoulli 效用函数, 则其效用为

$$U = pu(w - \alpha q - D + \alpha) + p'u(w - \alpha q).$$

在一个竞争的保险市场上, 保险公司从该投保者所获期望利润 $\alpha q - \alpha p = 0$, 因而 $p = q$. 因 $u(\cdot)$ 严格凹, 故

$$U \leqslant u(p(w - \alpha p - D + \alpha) + p'(w - \alpha p)) = u(w - pD),$$

且其中的 $\leqslant$ 号取 $=$ 仅当 $w - \alpha p - D + \alpha = w - \alpha p$, 即 $\alpha = D$. 这就表明, 该投保者为获得最大效用而购买保险的最优水平为 $\alpha^* = D$. 颇出人意外的是, α^* 竟与概率 p 无关!

2. 风险资产需求问题

设一风险厌恶的投资者将其全部资产 w 投资于风险资产与无风险资产，数额各为 α 与 β，$\alpha+\beta=w$. 每元无风险投资的收益为 1 元；每元风险投资的收益为 z 元，z 是服从分布 $F(\cdot)$ 的随机变量，假定均值 $\mu_F>1$. 投资者的问题是，选择风险投资额 α，使得最大化其效用

$$U(\alpha)=\int u(\alpha z+\beta)\mathrm{d}F(z),$$

其中，$u(\cdot)$ 是 Bernoulli 效用函数. 若 $\alpha=\alpha^*$ 是最优选择，则

$$U'(\alpha^*)\begin{cases}\leqslant 0, & \alpha^*=0,\\ =0, & 0<\alpha^*<w,\\ \geqslant 0, & \alpha^*=w;\end{cases}$$

$$U'(\alpha)=\int u'(\alpha z+\beta)(z-1)\mathrm{d}F(z).$$

因
$$U'(0)=u'(w)\int(z-1)\mathrm{d}F(z)>0$$

（假定 $u'(\cdot)>0$），故 $\alpha^*=0$ 的情况不会出现. 这表明投资者尽管厌恶风险，但 $\mu_F>1$ 的吸引力仍然诱使他多少选择一定的风险投资.

现在以风险厌恶的投资者 $i=1,2$ 取代上面的单个投资者，相应地，分别以 $u_i(\cdot)$，$U_i(\cdot)$ 与 α_i^* 取代 $u(\cdot)$，$U(\cdot)$ 与 α^*，假定 $0<\alpha_i^*<w(i=1,2)$，2 的风险厌恶甚于 1，则 $U_i'(\alpha_i^*)=0(i=1,2)$，$u_2(\cdot)=\psi(u_1(\cdot))$，$\psi'(\cdot)$ 与 $U_2'(\cdot)$ 单调减（命题 5.3）；

$$\begin{aligned}U_2'(\alpha_1^*)&=\int u_2'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z) \qquad (\bar{z}=\alpha_1^*(z-1)+w)\\
&=\int\psi'(y)u_1'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z) \qquad (y=u_1(\bar{z}))\\
&=\int_{-\infty}^{1}\psi'(y)u_1'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z)\\
&\quad+\int_{1}^{\infty}\psi'(y)u_1'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z)\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{1}\psi'(y_0)u_1'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z) \quad (y_0=u_1(w))\end{aligned}$$

$$+\int_1^{\infty}\psi'(y_0)u_1'(\bar{z})(z-1)\mathrm{d}F(z)$$
$$=\psi'(y_0)U_1'(\alpha_1^*)=0,$$

这推出 $U_2'(\alpha_1^*)\leqslant U_2'(\alpha_2^*)$，因而 $\alpha_1^*\geqslant\alpha_2^*$. 这表明，风险投资的需求随着风险厌恶的加强而减少.

3. 一般资产问题

上面的两资产问题自然地引导出一个 N 资产问题：设一风险厌恶的投资者可选择 N 种投资 $n=1,2,\cdots,N$，资产 n 每元收益为 z_n，$z=(z_1,\cdots,z_N)$ 是服从分布 $F(\cdot)$ 的随机向量. 投资者的问题是，选择投资组合 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$，使得 $\sum\alpha_n=w$ 且最大化其效用

$$U(\alpha)=\int u(\alpha\cdot z)\mathrm{d}F(z).$$

若Bernoulli效用函数 $u(\cdot)$ 是连续的、单调增的与凹的，则 $U(\cdot)$ 亦是连续的、单调增的与凹的，因而可当做一个通常的效用函数；相应地，$\alpha\in\mathbf{R}_+^N$ 可看做通常的商品. 因此，进一步的分析依赖于第二章中的理论.

5.3 随机优势

仍设 $\mathscr{L}$ 是货币彩票之空间，但限定每个 $F\in\mathscr{L}$ 满足

$$F(0)=0,\quad F(x_0)=1,\qquad(5\text{-}21)$$

其中，$x_0>0$ 与 F 有关. 如式(5-13)，约定 $\mu_F=\int x\mathrm{d}F(x)$（均值）.

在上节中，我们固定某个体的偏好 $\succcurlyeq$，个体依据 $\succcurlyeq$（它由Bernoulli效用函数 $u(\cdot)$ 表示）来比较不同的彩票并决定取舍. 现在则要说明，在彩票之间存在某些固有的序关系，它们决定于彩票本身的随机特性，而与个别的选择者的偏好无关.

5.3.1 一阶随机优势

首先给出以下定义.

定义 5.5 设 $F,G \in \mathscr{L}$. 若对任何增函数 $u(\cdot)$ 有

$$\int u(x)\mathrm{d}F(x) \geqslant \int u(x)\mathrm{d}G(x), \tag{5-22}$$

则说 F 对于 G 有一阶随机优势或一阶随机占优.

不等式(5-22) 意味着,若以 $u(\cdot)$ 为 Bernoulli 效用函数,则选择 F 的效用不低于选择 G 的效用. 因此,当 F 对于 G 有一阶随机优势时,任何选择者(只要他总认为收益多比少好)都会认为 F 不比 G 差,因而 F 对于 G 的优势是其本身所固有的,而与选择者无关. 特别,在式(5-22) 中取 $u(x)=x$ 得出 $\mu_F \geqslant \mu_G$. 不过,均值的优势对于一阶随机优势并不是充分的.

实际上,一阶随机占优关系比定义 5.5 所表现的更简单.

命题 5.4 设 $F,G \in \mathscr{L}$. 则 F 对于 G 有一阶随机优势 $\Leftrightarrow F \leqslant G$(即 $F(x) \leqslant G(x), \forall\, x \in \mathbf{R}$).

证 若 $F \leqslant G, b>0$ 充分大,则对任何增函数 $u(\cdot)$ 有

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty u(x)\mathrm{d}F(x) &= \int_0^b u(x)\mathrm{d}F(x) && \text{(用式(5-21))}\\
&= u(x)F(x)\Big|_0^b - \int_0^b F(x)\mathrm{d}u(x) && \text{(分部积分)}\\
&\geqslant u(x)G(x)\Big|_0^b - \int_0^b G(x)\mathrm{d}u(x) && \text{(用式(5-21))}\\
&= \int_0^\infty u(x)\mathrm{d}G(x).
\end{aligned}$$

反之,设式(5-22)对任何增函数 $u(\cdot)$ 成立. 取定 $x>0$,令

$$u(y)=\begin{cases}0, & y<x;\\ 1, & y \geqslant x,\end{cases}$$

则

$$F(x)=\int_0^\infty F(y)\mathrm{d}u(y)$$

$$= F(y)u(y)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u(y)\mathrm{d}F(y)$$

$$\leqslant G(y)u(y)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u(y)\mathrm{d}G(y) \qquad \text{(用式(5-21)、(5-22))}$$

$$= \int_0^{\infty} G(y)\mathrm{d}u(y) = G(x). \qquad \square$$

注意 $F\leqslant G$ 是 $\mathscr{L}$ 上的一个半序关系(即自反、传递且反对称的二元关系),但它显然不是完全的.

5.3.2 二阶随机优势

现在按另一种方式比较两个彩票.

定义 5.6 设 $F,G\in\mathscr{L}$. 若 $\mu_F=\mu_G$,且对任何单调增的凹函数 $u(\cdot):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ 不等式(5-22)成立,则说 F 对于 G 有二阶随机优势或二阶随机占优.

直观上,F 对于 G 有二阶随机优势意味着,尽管均值相等,但任何风险厌恶者倾向于选择 F,因而可以认为 F 有较小的风险. 特别,在式(5-22)中取 $u(x)=\rho x-x^2$($\rho>0$ 充分大)得出①

$$\sigma_F^2 = \int_0^{\infty} x^2\mathrm{d}F(x) - \mu_F^2$$

$$= \rho\mu_F - \int_0^{\infty} u(x)\mathrm{d}F(x) - \mu_F^2$$

$$\leqslant \rho\mu_G - \int_0^{\infty} u(x)\mathrm{d}G(x) - \mu_G^2 \qquad \text{(用式(5-22))}$$

$$= \int_0^{\infty} x^2\mathrm{d}G(x) - \mu_G^2 = \sigma_G^2,$$

可见 F 有较小的方差. 而这就意味着,在统计平均的意义上,选择 F 将更可靠地接近于获得平均收益 μ_F,而这就表明 F 有较小的风险.

---

① 只要令 $u(x)=u(\rho/2)(\forall\ x>\rho/2)$,$u(\cdot)$ 就在 $\mathbf{R}$ 上是单调增的凹函数.

以下是一个类似于命题 5.4 的结果.

命题 5.5 设 $F,G \in \mathscr{L}$, $\mu_F = \mu_G$,则 F 对于 G 有二阶随机优势的充要条件是

$$\int_0^x F(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_0^x G(y)\mathrm{d}y \quad (\forall\ x \geqslant 0). \tag{5-23}$$

证 分别以 $A(x)$ 与 $B(x)$ 记不等式(5-23) 的左端与右端. 若式(5-23) 成立,$u(\cdot)$ 是单调增的凹函数,取 $b>0$ 充分大,则

$$\int_0^\infty u(x)\mathrm{d}F(x) = \int_0^b u(x)\mathrm{d}F(x)$$

$$= [u(x)F(x) - u'(x)A(x)]\Big|_0^b + \int_0^b A(x)\mathrm{d}u'(x)\text{(两次分部积分)}$$

$$\geqslant [u(x)G(x) - u'(x)B(x)]\Big|_0^b + \int_0^b B(x)\mathrm{d}u'(x)$$

$$= \int_0^\infty u(x)\mathrm{d}G(x),$$

可见不等式(5-22)成立.

反之,设式(5-22)对任何单调增的凹函数成立. 取定 $x>0$,令

$$u(y) = \begin{cases} y, & y < x; \\ x, & y \geqslant x, \end{cases}$$

则 $u(\cdot)$ 是单调增的凹函数,于是

$$\int_0^x F(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty F(y)\mathrm{d}u(y)$$

$$= F(y)u(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty u(y)\mathrm{d}F(y)$$

$$\leqslant G(y)u(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty u(y)\mathrm{d}G(y) \qquad \text{(用式(5-22))}$$

$$= \int_0^x G(y)\mathrm{d}y.$$ □

对给定的 $\mu>0$,令 $\mathscr{L}_\mu = \{F \in \mathscr{L} : \mu_F = \mu\}$. 显然“二阶随机占优”关系构成 $\mathscr{L}_\mu$上的一个半序;依此半序 $\mathscr{L}_\mu$中有一个“最优元”,它就是 δ_μ,即确定地取 μ 的退化彩票, 它当然具有最小的风险.

*5.4 涉及风险的均衡

进入市场交易的商品可能具有不确定性,本节考虑这种情况下的竞争均衡,基本的方法是,将具不确定性的商品分化为若干种商品,将其中每种商品当作通常的商品处理,因而可对其应用一般均衡理论.

5.4.1 Arrow-Debreu 均衡

如同在 4.1 节中一样,设所考虑的经济中有 I 个消费者,J 个厂商与 L 种物质商品.所不同的是,现在假定有 S 个随机地出现的状态 $s=1,2,\cdots,S$,任何商品 l 的消费与生产都与状态 s 有关,因而应将二者合在一起考虑,构成所谓或有商品 ls,其数量与价格分别记为 x_{ls} 与 p_{ls}.例如,商品伞与状态 $S=\{$晴天,雨天$\}$结合起来,就得到两种或有商品:晴天 - 伞与雨天 - 伞,二者各有其交易价格与数量,且不必相同.消费者购买 3 把雨天 - 伞意味着,消费者与卖伞者在天气变化之前达成交易协议,规定如果下雨则购买 3 把伞.

以或有商品取代物质商品,消费集、偏好、生产集等亦需作相应改变.一个或有商品向量包括 LS 个分量

$$x=(x_{ls})=(x_{11},\cdots,x_{L1},\cdots,x_{1S},\cdots,x_{LS})\in\mathbf{R}^{LS}.$$

$\mathbf{R}^{LS}$ 就是或有商品空间,消费集 $X_i(1\leqslant i\leqslant I)$ 与生产集 $Y_j(1\leqslant j\leqslant J)$ 都是 $\mathbf{R}^{LS}$ 的子集,禀赋 $\omega_i\in\mathbf{R}^{LS}(1\leqslant i\leqslant I)$,仍然记 $\bar{\omega}=\sum\omega_i$.形式上,消费者 i 在 X_i 上的理性偏好仍记作 $\succcurlyeq_i$,但现在一个关键的假设是,$\succcurlyeq_i$ 有广义期望效用表示(参看 5.1.3 小节)

$$U_i(x_i)=\sum_s\pi_{si}u_{si}(x_{si}),x_i=(x_{1i},\cdots,x_{Si})\in X_i,$$

其中,$\pi_{Si}>0$ 是 s 对于 i 出现的概率,$\sum_s\pi_{si}=1$;$u_{si}(\cdot)(1\leqslant s\leqslant S)$ 是 Bernoulli 效用函数.若每个 $u_{si}(\cdot)$ 是凹函数,则 $U_i(\cdot)$ 亦为凹函

数，从而 $\succcurlyeq_i$ 是凸性的.

假定对每种或有商品 ls 都有一个完全竞争的市场. 消费者与厂商都在状态未确定之前作出消费与生产决策，并依据确定的市场价格 p_{ls} 达成交易协议. 在状态 s 出现之后，供货方依协议交付预定数额为 x_{ls} 的商品 l；其收益 $p_{ls}x_{ls}$ 则与 s 是否出现无关. 交易者具有对称的信息；特别，有同等的可能性观察到状态 s 的出现.

经过如上的处理之后，除了以或有商品取代通常的商品之外，我们所面对的市场框架在数学形式上与 4.1 节中所述并无不同，因而一般均衡理论的所有概念与结论，自然可应用于或有商品的完全竞争市场. 特别，对于或有商品市场，可以谈到 Pareto 最优配置与 Walras 均衡，只是后者依惯例改称为 Arrow-Debreu 均衡. 同样，两个基本的福利定理在目前情况下亦取得适当的形式，这些都不必重新建立.

由此可见，仅仅依靠商品概念的一个扩充，我们就将涉及风险的均衡理论完全纳入到一般均衡理论的框架之内，后者初看起来似乎是专门为确定性商品市场建立的！这一事实足见一般均衡理论的高度一般性.

5.4.2 Radner 均衡

上段中几乎不费吹灰之力就在或有商品市场的框架下移植了整个均衡理论，这不免使人喜出望外. 但你略加思索之后就会冷静下来：问题未必如此简单. 立即提出的一个疑问是，上述讨论中隐含了一个关键性的假定：在或有商品市场上，交易者在状态未确定之前一次性地将交易作成了. 然而在实际上，交易往往是随着有关状态的信息渐次显露而逐步完成的；交易者必定会随时利用获得的新信息修改自己的选择，实际交易是一个反复互动的复杂过程. 考虑到这些因素，我们还能确信 Arrow-Debreu 均衡能够实现吗？

下面就来考察，当交易分几次进行时会出现什么情况. 为简单起见，仅考虑交换经济(参见 4.2 节)，且假定 $X_i = \mathbf{R}_+^{LS}$ $(1 \leqslant i \leqslant$

I);只考虑两个时期:$t=0$ 时没有关于状态的任何信息,亦没有消费发生;$t=1$ 时状态完全确定.若在 $t=0$ 时所有或有商品的远期市场开放且达到 Arrow-Debreu 均衡,则也就实现了 Pareto 最优配置,因而到 $t=1$ 时并无重开交易的动力.因此只需考虑在 $t=0$ 时部分开放远期市场的情况.假定在 $t=0$ 仅开放商品 1 的远期市场,在 $t=1$ 则开放所有商品的现货市场.在 $t=0$ 时,消费者 i 以市场价格 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_S)\in\mathbf{R}^S$ 作成商品 1 的交易 $z_i=(z_{1i},z_{2i},\cdots,z_{Si})\in\mathbf{R}^S$;同时他正确地预计到现货市场的价格 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_S)\in\mathbf{R}_+^{LS}$ 并形成他在 $t=1$ 时的消费计划 $x_i=(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{Si})\in\mathbf{R}_+^{LS}$,这些选择解效用最大化问题

$$\begin{cases}\max U_i(x_i),\\ \text{s. t. } q\cdot z_i\leqslant 0,\quad z_i\in\mathbf{R}^S;\\ \quad p_s\cdot x_{si}\leqslant p_s\cdot\omega_{si}+p_{1s}z_{si}\quad(1\leqslant s\leqslant S),\quad x_i\in\mathbf{R}_+^{LS}.\end{cases}\tag{5-24}$$

注意并未限制 $z_i\geqslant 0$. $z_{si}<0$ 意味着 i 在 $t=0$ 时卖出远期商品 $1s$;若 $z_{si}<-\omega_{si}$,则出现卖空.当然 z_{si} 不能过小,因它受到 $p_s\cdot\omega_{si}+p_{1s}z_{si}\geqslant p_s\cdot x_{si}\geqslant 0$ 的约束.

定义 5.7(Radner,1982) 若对某个 $(p,q)\in\mathbf{R}^{LS}\times\mathbf{R}^S$,$(x_i^*,z_i^*)$ 是问题 $(5\text{-}24)_i(1\leqslant i\leqslant I)$ 的解,且满足条件

$$\sum_i z_i^*\leqslant 0,\quad \sum_i x_i^*\leqslant\bar{\omega},\tag{5-25}$$

则称 $(x^*,z^*)=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_I^*,z_1^*,z_2^*,\cdots,z_I^*)$ 为关于价格 (p,q) 的 Radner 均衡.

以下是本节的中心结果,它指明在一定意义上 Radner 均衡与 Arrow-Debreu 均衡一致.

定理 5.3 1° 若 $x^*\in\mathbf{R}_+^{LSI}$ 关于价格 $p\gg 0$ 为 Arrow-Debreu 均衡,则存在 $z^*\in\mathbf{R}^{SI}$ 与 $q\gg 0$,使 (x^*,z^*) 关于价格 (p,q) 为 Radner 均衡.

2° 若 (x^*,z^*) 关于价格 $(p,q)\gg 0$ 为 Radner 均衡,则有 $\mu_s>$

$0(1 \leqslant s \leqslant S)$，使 x^* 关于价格 $(\mu_1 p_1, \mu_2 p_2, \cdots, \mu_s p_S)$ 为 Arrow-Debreu 均衡.

证 1° 令 $q = (p_{11}, p_{22}, \cdots, p_{1S})$，$z_{si}^* = p_{1s}^{-1} p_s \cdot (x_{si}^* - \omega_{si})$，

$$z_i^* = (z_{1i}^*, z_{2i}^*, \cdots, z_{Si}^*), \quad z^* = (z_1^*, z_2^*, \cdots, z_I^*).$$

x^* 关于价格 p 是 Arrow-Debreu 均衡意味着 $x_i^*(1 \leqslant i \leqslant I)$ 解消费者 i 的效用最大化问题

$$\begin{cases} \max U_i(x_i), \\ \text{s.t. } p \cdot x_i \leqslant p \cdot \omega_i, \quad x_i \in \mathbf{R}_+^{LS}, \end{cases} \tag{5-26}$$

且市场出清条件 $\sum x_i^* = \bar{\omega}$ 满足. 由此直接推出 $\sum z_i^* \leqslant 0$，故条件(5-25)满足. 直接看出(x_i^*, z_i^*)满足问题(5-24)的约束条件；且当(x_i, z_i)满足问题(5-24)的约束条件时(对于 $q_s = p_{1s}$)，x_i 显然亦满足问题(5-26)的约束条件，从而(x_i^*, z_i^*)是问题(5-24)的解. 因此，(x^*, z^*)关于(p, q)为 Radner 均衡.

2° 令 $\mu_s = q_s / p_{1s}$，则 $\mu_s > 0$，x_i^* 显然满足问题

$$\begin{cases} \max U_i(x_i), \\ \text{s.t. } \sum_s \mu_s p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si}) \leqslant 0, \quad x_i \in \mathbf{R}_+^{LS} \end{cases} \tag{5-27}$$

的约束条件. 若 x_i 满足(5-27)的约束条件，令 $z_{si} = p_{1s}^{-1} p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si})$，则易见$(x_i, z_i)$满足问题(5-24)之约束条件，从而 x_i^* 是问题(5-27)的解. 这结合(5-25)易知 $\sum x_i^* = \bar{\omega}$，因此 x^* 关于价格 $(\mu_1 p_1, \mu_2 p_2, \cdots, \mu_S p_S)$ 为 Arrow-Debreu 均衡. □

定理5.3中的乘子 μ_s 可解释为在状态 s 下 $t = 1$ 时的1元钱在 $t = 0$ 时的价值.

无论 Arrow-Debreu 均衡还是 Radner 均衡，其实质都在于，通过(全部或部分地)开放或有商品的远期市场，使得商品在交易者之间流通的同时，财富亦在各状态之间转移，从而实现风险的某种最优配置.

5.4.3 资产市场

上段所说的通过或有商品的远期市场在各状态之间转移财富、调节风险，似乎是经济学家的一种理想，很难付诸实现. 实际上，资产市场的运作正好具有这些功能.

所谓资产或证券，是这样一种商品，持有者在未来某一时期获得一定收益，该收益可以是物质商品或货币，其数额与出现的状态有关. 下面就一最简单的情况作一形式化的描述. 如同上段一样，考虑 $t=0,1$ 两期的情况，假定 $t=0$ 时既没有关于状态的信息，亦没有消费发生；$t=1$ 时状态的出现完全确定. 若状态 s 出现，则一单位资产获得用商品 1 支付的收益 r_s，$r=(r_1,r_2,\cdots,r_S)\in\mathbf{R}^S$ 就称为**收益向量**. 通常设定商品 1 的现货交易价格为 1，这意味着该商品被当做货币使用. 几种特殊的资产如下：

1. 期货

$r=(1,1,\cdots,1)$，即期货的收益与状态无关. 这并不意味着期货完全没有风险，因其相对价值依赖于其他商品的价格，除非 $L=1$.

2. Arrow 资产

$r=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，即仅当某特定的状态 s 出现时，该资产获得 1 单位商品 1 作为收益.

3. 期权(欧式 Call 期权)

其收益决定于另一资产(下面称为原资产)的收益. 对于叫价 $c\in\mathbf{R}$，在状态显示之后(收益支付之前)，一单位期权持有者有权以价格 c 购买一单位原资产，其收益向量为

$$r(c)=(0\vee(r_1-c),\cdots,0\vee(r_S-c)),$$

其中，$0\vee\beta=\max\{0,\beta\}$，$r=(r_1,r_2,\cdots,r_s)$ 是原资产的收益向量.

现在考虑一组资产 $1,2,\cdots,K$，资产 k 的收益向量为 $r_k\in\mathbf{R}^S$，k 在 $t=0$ 时的价格为 q_k，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_K)$. 任何 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_K)\in\mathbf{R}^K$ 称为一个资产组合，其中 z_k 表示资产 k 的数量. 推广定义 5.7 如下.

定义 5.8 设 $x^* \in \mathbf{R}^{LSI}$ 是 $t=1$ 时的一个消费配置，$z^* = (z_1^*, z_2^*, \cdots, z_I^*) \in \mathbf{R}^{KI}$ 是 $t=0$ 时消费者的资产组合，$p \in \mathbf{R}^{LS}$ 是现货交易价格向量，$q \in \mathbf{R}^K$ 是 $t=0$ 时资产组合的价格向量. 若 (x_i^*, z_i^*) 解消费者 i 的效用最大化问题

$$\begin{cases} \max U_i(x_i), \\ \text{s.t. } q \cdot z_i \leqslant 0, \quad z_i \in \mathbf{R}^K; \\ p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si}) \leqslant \sum_k p_{1s} z_{ki} r_{sk} (1 \leqslant s \leqslant S), \quad x_i \in \mathbf{R}_+^{LS}, \end{cases} \tag{5-28}$$

且
$$\sum_i z_i^* \leqslant 0, \quad \sum_i x_i^* \leqslant \overline{\omega}, \tag{5-29}$$

则称 (x^*, z^*) 为关于价格 (p,q) 的 Radner 均衡.

由齐次性，可设 $p_{1s} = 1 (1 \leqslant s \leqslant S)$. 若令 $R = (r_{sk}) \in \mathbf{R}^{S \times K}$（收益矩阵），则问题(5-28) 的第二个约束条件可表为

$$\begin{bmatrix} p_1 \cdot (x_{1i} - \omega_{1i}) \\ \vdots \\ p_S \cdot (x_{Si} - \omega_{Si}) \end{bmatrix} \leqslant R z_i.$$

定理 5.4 设 $0 \neq r_k \in \mathbf{R}_+^S (1 \leqslant k \leqslant K)$，$(x^*, z^*)$ 是关于 (p, q) 的 Radner 均衡，则存在 $\mu \in \mathbf{R}_+^S$，使得 $q = \mu R$（q, μ 看做行向量）.

证 假定 Bernoulli 效用函数 $u_{si}(\cdot)$ 是严格增加的可微凹函数，以 $v_{si}(p_s, w_{si})$ 记由 $u_{si}(\cdot)$ 导出的间接效用函数. 令 $w_{si}^* = p_s \cdot \omega_{si} + \sum_k r_{sk} z_{ki}^*$，作问题(5-28) 的 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = \sum_s \pi_{si} u_{si}(x_{si}) - \alpha_i q \cdot z_i - \sum_s \lambda_s \Big(p_s \cdot x_{si} - \sum_k z_{ki} r_{sk} \Big).$$

由 K-T 条件，存在 $\alpha_i \geqslant 0, \lambda_s \geqslant 0 (1 \leqslant s \leqslant S)$，使得

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x^*, z^*)}{\partial x_{si}} = \pi_{si} \nabla u_{si}(x_{si}^*) - \lambda_s p_s$$
$$= \Big[\pi_{si} \frac{\partial v_{si}(p_s, w_{si}^*)}{\partial w_{si}} - \lambda_s \Big] p_s = 0; \text{（用式(2-11)）}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x^*, z^*)}{\partial z_{ki}} = -\alpha_i q_k + \sum_s \lambda_s r_{sk} = 0,$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant S, 1 \leqslant k \leqslant K, 1 \leqslant i \leqslant I$. 由以上等式推出

$$\lambda_s = \pi_{si} \frac{\partial v_{si}(p_s, w_{si}^*)}{\partial w_{si}} > 0;$$

$$\alpha_i q_k = \sum_s \lambda_s r_{sk} > 0. \tag{5-30}$$

因式(5-30)右端与 i 无关，可取 $i = 1, \mu = (\lambda_1/\alpha_1, \lambda_2/\alpha_1, \cdots, \lambda_S/\alpha_1)$，从式(5-30) 得出 $q = \mu R$. □

注意 $q = \mu R \Leftrightarrow R^{\mathrm{T}} \mu^{\mathrm{T}} = q^{\mathrm{T}}$，因此定理 5.4 中的 μ 惟一 $\Leftrightarrow$ rank $R = S$. 当此条件满足时说资产结构是完备的.

第六章　对　策　论

至此为止，我们对于个体经济行为的考察都基于一条未明确说出的假设，即个体在作出决策时，并不考虑他人的决策. 而在现实的经济活动中，各个个体的决策行为通常是互相影响、互相牵制的. 一个理性的决策者为使自己的决策导向尽可能有利的结局，必定要顾及对手或伙伴的决策，并且对他人的决策作出最佳的反应. 因此，有必要考虑在策略上互相关联的一组决策者的行为，这正是对策论的研究课题.

自然地与计谋、斗智等等联系在一起的对策一词，伴随着人类智慧的发展历程，有着久远的运用历史. 然而，作为一门现代意义上的科学，对策论是现代数学发展的产物，它的诞生无疑是以天才数学家 Von Neumann 与 Morgenstern 合著的《对策论与经济行为》(1944)发表为标志的.

对策论可分为非合作对策与合作对策两大部分，本章仅考虑非合作对策，有关的概念与结论对于非完全竞争市场的经济分析起重要作用.

6.1　对策及其表示

6.1.1　描述性说明

关于对策的完全形式化的表示并不简单. 在走到那一步之前，最好是作一些不那么严格但较为直观的说明.

粗略地说来，对策是策略上互动的一组个体间的相互作用，这

些个体的选择与结局依赖于同一组中所有个体已有或预期的行为.

一个对策包含以下 4 个要素:

(1) 局中人,即策略上互相关联的一组个体;

(2) 游戏规则,即局中人行动的规则;

(3) 结局,局中人行为的每一组合对应一定的结局;

(4) 收益,即局中人对各个不同结局的偏好关系,表示这一偏好的效用函数称为*收益函数*,效用水平称为收益.

对策论遵循以下基本假设:

(1) 局中人对对策结构有对等的、完全的知识;

(2) 局中人对自己及同局人已有的行为具有完全的记忆.

"对策"(game)一词本来就具有博弈、游戏的含义. 实际上,我们所考察的对策在主要特征上与通常的游戏是十分相似的,因而利用某些游戏来作为直观解释的实例,是很自然的事. 下面所述的钱币游戏,在本章中具有典型性,将反复引用.

例 6.1(钱币游戏) 设局中人 1,2 玩钱币游戏,分别以 P 与 N 记钱币的正面与反面. 依规则设定的不同,分为如下 4 种情况(A~D).

钱币游戏 A: 局中人 1,2 同时出示所持钱币的一面. 若出现相同的面,则局中人 1 胜局中人 2;出现不同面时相反. 在两种情况下,负者支付 1 元给胜者.

钱币游戏 B: 局中人 1 先于 2 出示钱币,其他规则与钱币游戏 A 相同.

钱币游戏 C: 局中人 1 先走一步,但所示的一面不让 2 看到,其他规则与钱币游戏 A 相同. 因局中人 1,2 互不了解对手的行为,两者同时出手或先后出手并无差别,因此 A,C 两种情况实质上一样.

现在用一个如图 6-1 的倒置树形图来表示钱币游戏 C(或 A)的对策过程. 局中人 1 在初始决策点 x_0(图中表为 $\circ$)选择钱币的

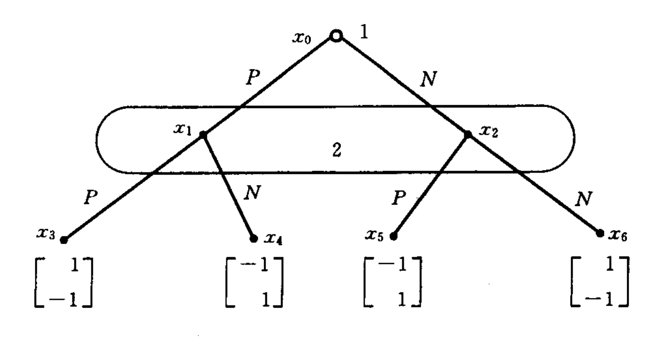


图 6-1

正面（P）或反面(N)，到达局中人 2 的决策点 x_1 或 x_2(图中记为·). 在每种情况下，2有两种选择，组合成4种结局，分别表为点 x_3，x_4，x_5，x_6；每点下方的列向量的第一个分量表示局中人 1 的收益，第二个分量表示局中人 2 的收益. 图中点 x_1，x_2 被一线圈围住，表示 2 在点 x_1，x_2 不了解 1 的选择. 如图 6-1 的树形图称为对策树.

钱币游戏 D：首先由抽签决定谁走第一步，然后按钱币游戏 B 的规则进行. 这种情况的对策树由图 6-2 给出，其中 ◦ 表示决定开局权利的某个自然裁决，1/2 表示局中人 1，2 各有 1/2 的开局概率.

至此为止，我们只是对对策作了一些直观的描述. 在一个具体的对策(如钱币游戏 A～D)中，行为、结局与收益的含义是清楚的. 但要在一种抽象的形式下界定这些用语，就不容易了. 实际上，在关于对策的一般定义中，完全不可能对局中人、策略、行为、收益一类的概念作任何实质性的解释，它们如同几何学中的点一样，作为对策的基本要素，是无需定义而直接给定的. 要点在于，关于对策的分析重要的不在于如何理解行为本身，而在于不同行为之间的关联及其与收益之间的对应关系. 因此，对策的形式结构如同任何抽象数学结构一样，它只是一定抽象集合上某些映射或函数组成的系统. 鉴于对策的多样性，一个完全的形式化处理自然是复杂的. 我们首先提出一种简单的情况，即正规型对策，其中不考虑行

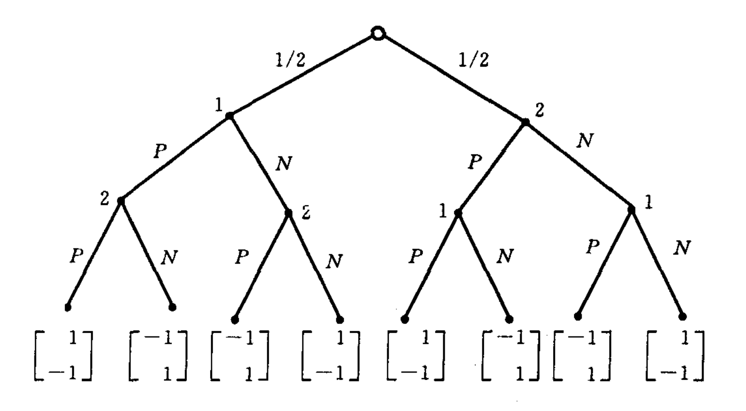


图 6-2

为发生的先后次序.

6.1.2 正规型对策

首先给出完全形式化的如下定义.

定义 6.1 一个正规型(或标准型、策略型)对策是一个如下的三元组 $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$,其中

1° $I = \{1,2,\cdots,I\}$ 是局中人的集合;

2° 每个局中人 $i \in I$ 有一策略集 $S_i \neq \varnothing$;

3° 每个局中人 $i \in I$ 有一效用函数 u_i: $\prod S_i \to \mathbf{R}$(也称为收益函数或支付函数,通常表出收益的货币数量).

如我们在前面已估计到的,对策的形式化定义完全不去解释什么是策略、收益如何由策略决定等等.对于策略与收益的明确界定,完全是给出一个具体对策才可能且必须作的.正因为如此,对策概念才有可能作最广泛的应用.

用钱币游戏能对正规型对策作最明显的说明.

1. 钱币游戏 A(依例 6.1)

局中人 1 有两个策略:出示正面与出示反面,分别记作 P 与 N,因此 $S_1 = \{P,N\}$.同理,$S_2 = \{P,N\}$,从而

$$S_1 \times S_2 = \{(P,P),(P,N),(N,P),(N,N)\}.$$

以 u_i 记局中人 i 的货币收益，则 $u_i = \pm 1 (i = 1,2)$，具体地是

$$u_1(P,P) = u_1(N,N) = - u_1(P,N) = - u_1(N,P) = 1,$$

而 $u_2 = - u_1$. 以上资料综合在如下的表格（称为对策表）中：

	P	N
P	1, −1	−1,1
N	−1,1	1, −1

表的左侧与上方分别列出 S_1 与 S_2 中的诸策略，而表内则是(u_1, u_2) 的值（括号已省去）. 这样的表仅限于表示二人对策.

2. 钱币游戏 B

如同钱币游戏 A 一样有 $S_1 = \{P,N\}$. 但局中人 2 的策略与 1 已有的行为有关，有 4 种可能的情况，即

$$S_2 = \{(PP,NP),(PP,NN),(PN,NP),(PN,NN)\}, \tag{6-1}$$

其中，(PP,NP) 表示当 1 取 P 时 2 取 P，当 1 取 N 时 2 取 P，余类推. 相应地，作出对策表如下：

	(PP,NP)	(PP,NN)	(PN,NP)	(PN,NN)
P	1, −1	1, −1	−1,1	−1,1
N	−1,1	1, −1	−1,1	1, −1

钱币游戏 A～D 具有一共同特点：两个局中人有赢必有输，这种对策称为对抗性对策. 下面是一个非对抗性对策的例子.

3. 钱币游戏 E

局中人 1,2 同时出示钱币的一面. 若两人都出示正面，则各得奖金 2 元；若都出示反面，则各得奖金 1 元；若出示不同的面，则两人都无收益. 相应的对策表如下：

	P	N
P	2,2	0,0
N	0,0	1,1

以上对策的特点是：其中出现双赢的结局.

设 $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$ 是给定的正规型对策，其中的 S_i 皆为有限集. 现在考虑 Γ_N 的随机化. 如同或有商品一样，或有行为亦有自然的意义. 例如，设 $(s_1, s_2) =$（散步，游泳）是两种策略，则"若阴天则散步，若晴天则游泳"是一种或有行为，当"天阴"与"天晴"的概率分别为 0.4 与 0.6 时，上述选择可形式地表成 $0.4s_1 + 0.6s_2$，它可看做一种混合策略. 一般地，形式地做出 $S_i = \{s_{mi} : 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 中诸元的凸组合

$$\sigma_i = \sum_m \pi_m s_{mi}, \quad \pi_m \geqslant 0, \quad \sum_m \pi_m = 1, \tag{6-2}$$

其全体记作 $\Delta(S_i)$，称为 S_i 的混合扩张；称每个 $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ 为局中人 i 的混合策略；与此相对应，称 S_i 中的元为纯策略. 若将表如式(6-2)的 σ_i 等同于 $\mathbf{R}^M$ 中的点 $(\pi_1, \cdots, \pi_M)$，则在几何上 $\Delta(S_i)$ 就是 $M-1$ 维标准单纯形 Δ（对照 5.1.1 小节中的单纯彩票空间 $\mathscr{L}$！），Δ 的顶点正好表示 M 个纯策略. 式(6-2)中的 π_m 自然地解释为局中人 i 选择纯策略 s_{mi} 的概率，通常将 π_m 记作 $\sigma_i(s_{mi})$①. 下面将看到，这一记号有其方便.

效用函数 $u_i(\cdot)$ 可自然地扩张到积集 $\prod \Delta(S_i)$ 上：任给 $\sigma_i = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) s_i \in \Delta(S_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant I)$，形式地展开 $u_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_I)$ 为

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_I) &= u_i\Big(\sum_{s_1 \in S_1} \sigma_1(s_1) s_1, \cdots, \sum_{s_I \in S_I} \sigma_I(s_I) s_I\Big) \\ &= \sum_s \sigma_1(s_1) \cdots \sigma_I(s_I) u_i(s), \end{aligned} \tag{6-3}$$

---

① 相应地，混合策略 σ_i 可定义为一个函数 $\sigma_i(\cdot) : S_i \to [0,1]$，它满足条件 $\sum_m \sigma_i(s_{mi}) = 1$.

其中 $s=(s_1,\cdots,s_I)$ 遍取 $\prod S_i$. 我们就用式(6-3)作为 $u_i(\sigma_1,\cdots,\sigma_I)$ 的定义. 这样, $u_i(\cdot)$ 被扩张为 i 在 $\prod \Delta(S_i)$ 上的效用函数,其定义本身决定它对每个变元为线性函数.

这就从 Γ_N 导出一个新的正规型对策 $\Gamma_N'=(I,\{\Delta(S_i)\},\{u_i\})$,称它为 Γ_N 的随机化对策. 下面将看到,考虑随机化对策不仅在概念上是必要的,而且在方法上有助于达到一个更完善的理论.

6.1.3 展开型对策

正规型对策完全不考虑局中人行为发生的顺序,因而不能完全地描述实际的对策过程,尤其是那些局中人反复相互作用的复杂对策过程. 下面考虑的展开型对策,则具有更大的一般性,它涵盖了实际对策过程中出现的几乎所有可能的情况.

展开型对策概念源于对策树. 在例 6.1 中已用到对策树这一形象化的工具. 原则上,任何仅含有限个局中人与有限种行为的对策都可用对策树来表示. 而且,无论是否实际画出对策树,我们都会相信,对策过程必然具有一个树形结构;而所谓展开型对策,原来不过是对策树结构的一个形式化描述. 以下定义尽管颇为繁琐乏味,看起来远不如直接审视一个如图 6-1 或图 6-2 的对策树那样直观自然,但它显然是具体的对策树的一种抽象.

定义 6.2 一个展开型对策是一个如下的十元组:

$$\Gamma_E=\{I,X,A,p(\cdot),\alpha(\cdot),\mathscr{H},H(\cdot),\iota(\cdot),\rho(\cdot),u(\cdot)\}.$$

其中各项目分别解释如下:

1° $I=\{1,2,\cdots,I\}$ 是局中人的集合.

2° $X=\{x_0,x_1,\cdots\}$ 是节点的集合, x_0 称为*初始节点*.

3° A 是行为的集合.

4° $p(\cdot):X\to X\cup\{\varnothing\}$, $p(x_0)=\varnothing$;当 $x\neq x_0$ 时称 $p(x)$ 为 x 的直接先行, $s(x)=p^{-1}(x)$ 称为 x 的直接后继;反复迭代 $p(\cdot)$ 得出 x 的所有先行节点,反复迭代 $s(\cdot)$ 得出 x 的所有后继节点,两

者互不相交. 当 $s(x)=\varnothing$ 时称 x 为尾端，以 T 记其全体，每个 $x\in X\backslash T$ 称为决策点.

5° $\alpha(\cdot): X\backslash\{x_0\}\to A$，$\alpha(x)$ 表示由 $p(x)$ 导致 x 的行为，$c(x)=\alpha(s(x))$ 称为决策点 x 的选择集；假定当 $x\neq x'$，$p(x)=p(x')$ 时必定 $\alpha(x)\neq\alpha(x')$（从同一决策点出发，确定的行为必得出确定的结果）.

6° $\mathscr{H}$ 是由某些互不相交的非空决策点集构成的集，每个 $H\in\mathscr{H}$ 称为信息集；每个决策点必属于某个信息集.

7° $H(\cdot): X\backslash T\to\mathscr{H}$，$H(x)$ 表示 x 所属的信息集，假定 $H(x)=H(x')\Rightarrow c(x)=c(x')$，因而 $c(x)$ 仅决定于 $H=H(x)$，记作 $c(H)$.

8° $\iota(\cdot):\mathscr{H}\to\{0,1,\cdots,I\}$，$i=\iota(H(x))$ 表示 x 是局中人 i 的决策点，$i=0$ 表示自然仲裁者，$\mathscr{H}_i=\{H: i=\iota(H)\}$ 称为 i 的信息集族.

9° $\rho(\cdot,\cdot):\mathscr{H}_0\times A\to[0,1]$，$\rho(H,a)(H\in\mathscr{H}_0, a\in A)$ 表示自然仲裁者在点 $x(x\in H)$ 选择行为 a 的概率，假定

$$\sum_{a\in c(H)}\rho(H,a)=1;\quad \rho(H,a)\neq 0\Rightarrow a\in c(H).$$

10° $u=(u_1,\cdots,u_I)$，$u_i(\cdot): T\to\mathbf{R}$ 是 i 的效用函数.

当信息集皆为单点集时，称对策为完备信息对策；当节点集 X 为有限集时，称对策为有限对策.

以上定义中，集 I,X,A 假定都是有限的. 不过，有限性限制都可以突破，只要对所有相关概念的叙述作相应的修改.

现在以图 6-1 所表示的钱币游戏 C 为例来说明定义 6.2.

1° 局中人集 $I=\{1,2\}$.

2° 节点集 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_6\}$.

3° 行为集 $A=\{P,N\}$.

4° $p(x_1)=p(x_2)=x_0$，$p(x_3)=p(x_4)=x_1$，$p(x_5)=p(x_6)=x_2$，$T=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$.

5° $\alpha(x_1)=\alpha(x_3)=\alpha(x_5)=P, \alpha(x_2)=\alpha(x_4)=\alpha(x_6)=N$, $c(x_0)=c(x_1)=c(x_2)=\{P,N\}$.

6° $\mathscr{H}=\{\{x_0\},\{x_1,x_2\}\}$.

7° $H(x_0)=\{x_0\}, H(x_1)=H(x_2)=\{x_1,x_2\}, c(H(x_1))=\{P,N\}$.

8° $\iota(\{x_0\})=1, \iota(\{x_1,x_2\})=2, \mathscr{H}_1=\{\{x_0\}\}, \mathscr{H}_2=\{\{x_1, x_2\}\}$.

9° $\mathscr{H}_0=\varnothing$,不必用到函数 $\rho(\cdot)$.

10° $u_1(T)=-u_2(T)=(1,-1,-1,1)$.

在上段中,我们将钱币游戏 A,B 等表成了正规型对策,这些游戏显然也是展开型对策.一般地,每个展开型对策都惟一地对应一个正规型对策,下面就来考虑如何作到这一点.设 Γ_E 如定义 6.2,要从它导出一个正规型对策 $\Gamma_N=(I,\{S_i\},\{u_i\})$,关键是适当地构成策略集 S_i.若一个函数 $s_i:\mathscr{H}_i\to A$ 满足 $s_i(H)\in c(H)(\forall\ H\in\mathscr{H}_i)$,则称 s_i 是 i 的一个策略;以 S_i 记这种策略之全体.给定一个策略组合 $s=(s_1,\cdots,s_I)\in\prod S_i$,$s$ 决定一个实际发生的行为序列,它导向一个确定的尾端 x,就定义 $u_i(s)=u_i(x)$.这样得到定义于 $\prod S_i$ 上的效用函数 $u_i(\cdot)(1\leqslant i\leqslant I)$.

下面用钱币游戏 B 来作说明,这个对策的对策树如图 6-1,只是去掉其中围住 x_1,x_2 的线圈.直接由图 6-1 知

$$\mathscr{H}_1=\{\{x_0\}\},\quad \mathscr{H}_2=\{\{x_1\},\{x_2\}\};$$
$$c(x_0)=c(x_1)=c(x_2)=\{P,N\}\triangleq A.$$

函数 $\mathscr{H}_1\to A$ 有两个,分别记作 P,N,于是 $S_1=\{P,N\}$.函数 $\mathscr{H}_2\to A$ 有 4 个,它们是

$$s_{21}:\{x_1\}\to P,\{x_2\}\to P;$$
$$s_{22}:\{x_1\}\to P,\{x_2\}\to N;$$
$$s_{23}:\{x_1\}\to N,\{x_2\}\to P;$$
$$s_{24}:\{x_1\}\to N,\{x_2\}\to N.$$

它们都满足条件$s_{2j}(H) \in c(H)(H \in \mathscr{H}_2, 1 \leqslant j \leqslant 4)$. 因此$S_2 = \{s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}\}$,它正好与式(6-1)表示的$S_2$一致. 设$s = (P, s_{21})$,则$s$的行为导向尾端$x_3$,因此$u_1(s) = u_1(x_3) = 1$. 类似地可决定其他效用值,所得结果正好与6.1.2小节中的对策表一致.

展开型对策Γ_E所导出的正规型对策Γ_N,称为Γ_E的正规型表示,它无疑给出了Γ_E的一个更紧凑的表示形式,因而更便于进行分析. 但须注意,不同的展开型对策可能有同一正规型表示. 这就表明,将展开型对策归结为其正规型表示,可能会丢失一些信息. 如果对策中的行为是同时发生的,正规型表示确能提供对策的所有信息. 而对于6.3节中将讨论的动态对策,仅考虑正规型表示是不够的.

6.2 静态对策

局中人只有一次同步行动的对策称为静态对策,它在正规形式下能得到很好处理.

给定正规型对策$\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$,$\Gamma_N' = (I, \{\Delta(S_i\}, \{u_i\})$是它的随机化. 基本的问题是:理性的局中人将如何选择策略,以达到某种有利的结局?问题的解答依赖于对策略的效果做出适当评价,这导致一系列强弱不等的概念,它们依次是:优势策略、合理化策略、Nash均衡,后者处于中心地位.

设$S = \prod S_i$,$\Sigma = \prod \Sigma_i$,$\Sigma_i = \Delta(S_i)$. 对$s \in S$,约定使用如下很方便的记号:$s = (s_i, s_{-i})$,其中s_{-i}表i的对手的策略,即

$$s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_I).$$

相应地,S也写作$S_i \times S_{-i}$. 类似地,$\sigma \in \Sigma = \Sigma_i \times \Sigma_{-i}$表为$(\sigma_i, \sigma_{-i})$. 这些记号将在今后不加说明地使用.

6.2.1 优势策略

局中人i面对他的两个可能的策略$s_i, s_i' \in S_i$,权衡优劣决定

取舍时，要考虑到对手们所有可能的策略选择. 因此，他实际上要比较定义于 S_{-i} 上的函数 $u_i(s_i, \cdot)$ 与 $u_i(s_i', \cdot)$. 这导致以下定义.

定义 6.3 设 $i \in I, s_i, s_i' \in S_i$. 若

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad (\forall\ s_{-i} \in S_{-i}), \tag{6-4}$$

则说 s_i 严格优于 s_i'；若

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}) \quad (\forall\ s_{-i} \in S_{-i}), \tag{6-5}$$

且至少有某个 $s_{-i} \in S_{-i}$ 使式(6-5)为严格不等式，则说 s_i 优于 s_i'. 若 s_i(严格)优于所有其他 $s_i' \in S_i$，则称 s_i 为局中人 i 的(严格)优势策略；若有某个 $s_i' \in S_i$(严格)优于 s_i，则称 s_i 为 i 的(严格)弱势策略. 若对每个 $i \in I$, s_i 是 i 的(严格)优势策略，则称 $s = (s_i, s_{-i}) \in S$ 为对策 Γ_N 的(严格)优势策略均衡.

将纯策略换成混合策略，就得(严格)优势(弱势)混合策略的相应定义，无须赘述. 一个很有用的事实是，对于混合策略 σ_i, σ_i'，在检验 σ_i' 严格优于 σ_i 时，只需验证形式上较弱的条件. 这就是如下的命题.

命题 6.1 设 $i \in I, \sigma_i, \sigma_i' \in \Sigma_i, s_i \in S_i$.

1° σ_i' 严格优于 σ_i 的充要条件是

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad (\forall\ s_{-i} \in S_{-i}). \tag{6-6}$$

2° s_i 是 i 的严格弱势混合策略的充要条件是，$\exists\ \sigma_i \in \Sigma_i$，使得

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad (\forall\ s_{-i} \in S_{-i}). \tag{6-7}$$

因此，i 的严格弱势纯策略亦为严格弱势混合策略.

3° 若 s_i 是 i 的严格弱势混合策略，$\sigma_i(s_i) > 0$，则 σ_i 亦是 i 的严格弱势混合策略.

证 1° 设条件(6-6)满足，则对任给 $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ 有(参见式(6-3))

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \Big[\prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k)\Big] u_i(\sigma_i', s_{-i}) \\ &> \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \Big[\prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k)\Big] u_i(\sigma_i, s_{-i}) \qquad (\text{用式(6-6)}) \end{aligned}$$

$$= u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),$$

这表明 σ_i' 严格优于 σ_i.

由 1°直接推出 2°.

3° 设 $\bar{\sigma}_i$ 严格优于 s_i，今构成 $\sigma_i' \in \Sigma_i$ 严格优于 σ_i. 定义

$$\sigma_i'(s_i') = \begin{cases} \sigma_i(s_i') + \bar{\sigma}_i(s_i')\sigma_i(s_i), & s_i' \neq s_i; \\ \bar{\sigma}_i(s_i)\sigma_i(s_i), & s_i' = s_i. \end{cases}$$

直接看出 $\sigma_i'(s_i') \geqslant 0, \sum_{s_i' \in S_i} \sigma_i'(s_i') = 1$，故

$$\sigma_i' = \sum_{s_i' \in S_i} \sigma_i'(s_i') s_i' \in \Sigma_i.$$

余下只要验证不等式(6-6). 取定 $s_{-i} \in S_{-i}$，有

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i', s_{-i}) &= \sum_{s_i' \neq s_i} [\sigma_i(s_i') + \bar{\sigma}_i(s_i')\sigma_i(s_i)] u_i(s_i', s_{-i}) \\ &\quad + \bar{\sigma}_i(s_i)\sigma_i(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i' \neq s_i} \sigma_i(s_i') u_i(s_i', s_{-i}) + \sigma_i(s_i) u_i(\bar{\sigma}_i, s_{-i}) \\ &> \sum_{s_i' \neq s_i} \sigma_i(s_i') u_i(s_i', s_{-i}) + \sigma_i(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= u_i(\sigma_i, s_{-i}). \end{aligned}$$

□

现在来看如何利用上述概念与结论来估计对策的结局. 一个直观上很自然的思想是，局中人必定保留那些明显地具有优势的策略，排除那些明显地具有劣势的策略，留下为数较少的策略作进一步考察. 具体的结论如下.

(1) 严格优势策略必为理性的局中人所采用. 不过这种策略很少存在.

(2) 严格弱势策略必被理性的局中人所排除，依次排除的结果余下一个较小的策略集，它与排除的顺序无关.

(3) 依据命题 6.1，排除严格弱势策略的程序是：首先排除所有严格弱势的纯策略，余下 $S_i'' \subset S_i$；然后排除所有不在 $\Delta(S_i'')$ 中的混合策略.

(4) 一般弱势策略是否应排除的问题较为复杂，而且，排除弱势策略的后果一般与排除的顺序有关.

下面以著名的囚犯困境问题为例来说明.

	招供	拒供
招供	−5,−5	−1,−10
拒供	−10,−1	−2,−2

例 6.2 设同案犯 1,2 被告知：若两人同时招供，每人将被判 5 年监禁；若两人都拒供，将被各判 2 年；若仅 1 人招供，则招供者与拒供者将被分别判 1 年与 10 年. 现在分析囚犯最可能的选择是什么. 这一对策的对策表如上. 直接看出，对于每个案犯，招供都是严格优势策略，(招供，招供)是一个严格优势策略均衡；拒供都是严格弱势策略. 因此，囚犯最可能的选择是同时招供.

值得注意的是，就囚犯的共同利益来说，同时招供并非最佳选择，同时拒供对双方都更有利. 然而，在互相隔离的情况下，利己主义的囚犯却不能作于双方最有利的选择. 这个例子典型地说明了：利己主义的分散决策，不能实现共同的最优. 在军备控制、环境治理、劳资谈判等问题中，经常出现类似的情况.

	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

用简单的例子就可说明，排除弱势策略的后果并不确定. 设一对策的对策表如右. M,U 是局中人 1 的弱势(但非严格弱势) 策略，2 没有弱势策略. 若 1 排除 M，则 R 成为 2 的弱势策略. 若 2 排除 R，则 1 必选择 D. 因此结局是(D,L). 另一方面，若 1 首先排除 U，然后 2 排除 L，则导致最后结局为(D,R)！

6.2.2 合理化策略

上段结果表明，排除弱势策略是不可靠的. 而排除严格弱势策略，则可能仍然留下过多未必可取的策略，因而需要提出新的原则，使之能从其中进一步排除某些不可取的策略.

定义 6.4 设 $i \in I, \sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \Sigma$. 若

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \quad (\forall\, \sigma_i' \in \Sigma_i), \tag{6-8}$$

则说 σ_i 是局中人 i 对其对手策略 σ_{-i} 的**最佳回应**.

若 σ_i 对任何 $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ 都不是最佳回应，则对于理性的局中人 i 是不可取的. 若局中人逐次排除掉这样的策略，则最终留下的策略称为合理化策略(依 Bernheim, Pearce, 1984)，它与排除的顺序无关. 容易看出，严格弱势策略必非合理化策略. 不过，当 $I > 2$ 时，严格弱势策略以外的策略未必都是合理化策略.

例 6.3 考虑如右表所示的正规型对策. 因 $\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_3$ 严格优于 b_4，故局中人 2 必排除 b_4. b_4 被排除之后，a_2 严格优于 a_4，因此局中人 1 必排除 a_4. b_4 与 a_4 被排除之后，a_1, a_2, a_3 分别是 1 对 b_3, b_2, b_1 的最佳回应；b_1, b_2, b_3 分别是 2 对 a_1, a_2, a_3 的最佳回应. 因此，a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 分别为 1 与 2 的合理化策略.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0, −2	0,0	10, −1

以上例子表明，合理化策略仍然可能是一个过大的集，这就有必要建立更为严格的标准，以便从合理化策略中分离出更可取的结局. 下面引进的 Nash 均衡概念提供了一个理想的解决办法.

6.2.3 Nash 均衡

最佳回应策略只是对于固定的对手策略最大化其效用. 如果存在这样一组策略，使得所有局中人在对手既定策略的约束下同时最大化其效用，那么，局中人就不再有选择其他策略的兴趣了，因而达到了一种均衡状态. 这就导致以下定义.

定义 6.5(Nash, 1951) 若 $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \Sigma$ 满足条件

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \quad (\forall\, \sigma_i' \in \Sigma_i, i \in I), \tag{6-9}$$

则称 σ 为一个**混合策略 Nash 均衡**，简称为 **Nash 均衡**.

类似地，可定义纯策略 Nash 均衡的概念.

对照式(6-8)、(6-9)看出，$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$ 是 Nash 均衡$\Leftrightarrow \forall i\in I$，$\sigma_i$ 是 i 对 σ_{-i} 的最佳回应. 因此，当 σ 是 Nash 均衡时，每个 σ_i 是 i 的合理化策略. 这就表明，Nash 均衡策略比合理化策略更具优势. 如果 $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$ 是 Nash 均衡，则每一个体 i 在预计到对手必选择策略 σ_{-i} 的情况下，不再有改用 σ_i 以外的其他策略的兴趣，因而对策在 σ 处于均衡状态.

为更便于判定 Nash 均衡，下面用形式上更弱的条件来刻画 Nash 均衡.

命题 6.2 对于 $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})\in\Sigma$，以下条件互相等价：

1° σ 是 Nash 均衡；

2° $\forall i\in I,\forall s_i\in S_i,\forall s_i'\in S_i^+\triangleq\{s_i\in S_i:\sigma_i(s_i)>0\}$，有

$$u_i(s_i',\sigma_{-i})\geqslant u_i(s_i,\sigma_{-i});$$

3° $\forall i\in I,\forall s_i\in S_i,\forall s_i',s_i''\in S_i^+$，有

$$u_i(s_i',\sigma_{-i})=u_i(s_i'',\sigma_{-i})\geqslant u_i(s_i,\sigma_{-i}).$$

由此推出，$s\in S$ 是纯策略 Nash 均衡当且仅当 s 是混合策略 Nash 均衡.

证 1°⇒2°. 若 2°不成立，则存在 $i\in I,s_i,s_i'\in S_i$，使得 $\sigma_i(s_i')>0$，

$$u_i(s_i,\sigma_{-i})>u_i(s_i',\sigma_{-i}).$$

类似于命题 6.1 之 3° 的证，构成

$$\sigma_i'=[\sigma_i(s_i)+\sigma_i(s_i')]s_i+\sum_{s_i''\neq s_i,s_i'}\sigma_i(s_i'')s_i''\in\Sigma_i,$$

则容易直接验证

$$u_i(\sigma_i',\sigma_{-i})>u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}),$$

这表明 σ 不能为 Nash 均衡.

显然 2°⇒3°.

3°⇒1°. 设 3°成立，则对任给 $i\in I,\sigma_i'\in\Sigma_i$ 有

$$u_i(\sigma_i,\sigma_{-i})=\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i'(s_i)\sum_{s_i'\in S_i^+}\sigma_i(s_i')u_i(s_i',\sigma_{-i})$$

$$\geqslant \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_i' \in S_i^+} \sigma_i(s_i')\sigma_i'(s_i)u_i(s_i,\sigma_{-i})$$

$$= u_i(\sigma_i',\sigma_{-i}),$$

这正表明 σ 是 Nash 均衡. □

由命题 6.2 得出求 Nash 均衡的方法如下：

(1) 首先求出所有纯策略 Nash 均衡.

(2) 设 $\sigma = (\sigma_i,\sigma_{-i})$ 是待定的混合策略 Nash 均衡. 若 σ_i 不是纯策略，则有不同的 $s_i', s_i'' \in S_i$，使 $\sigma_i(s_i')\sigma_i(s_i'') > 0$，于是由命题 6.2 之 3° 得出一个方程

$$u_i(s_i',\sigma_{-i}) = u_i(s_i'',\sigma_{-i}).$$

如上的方程构成的方程组有可能完全决定 σ.

例 6.4 (1)钱币游戏 A，其对策表见于 6.1.2 小节. 直接看出它没有纯策略 Nash 均衡. 设

$$\sigma = (\sigma_1,\sigma_2) = (\alpha P + \alpha' N, \beta P + \beta' N) \qquad (6\text{-}10)$$

是待定的 Nash 均衡，$0 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 1$. 若 $0 < \alpha < 1$，则

$$\beta - \beta' = u_1(P,\sigma_2) = u_1(N,\sigma_2) = -\beta + \beta',$$

由此解出 $\beta = 1/2$. 同理当 $0 < \beta < 1$ 时有 $\alpha = 1/2$. 因此

$$\sigma = \left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}N\right)$$

是唯一的 Nash 均衡. 直观上，理性的局中人 1,2 在出手之前，都估计到对手选择 P 与 N 的机会均等，因而自身选择 P,N 的倾向亦必同等. 这种均衡结局与多次实验的平均结果正相符合.

(2) 钱币游戏 E，其对策表见于 6.1.2 小节. 直接看出 (P,P) 与 (N,N) 都是 Nash 均衡. 此外，应用上面处理钱币游戏 A 的方法还可求得另一个 Nash 均衡，即

$$\sigma = \left(\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}N, \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}N\right).$$

顺便指出，尽管 (P,P) 与 (N,N) 都是钱币游戏 E 的 Nash 均衡，但 (P,P) 与 (N,N) 都不是优势策略均衡，P,N 也不是任何一

个局中人的优势策略. 由此可见,Nash 均衡策略是与优势策略很不同的概念.

(3) 囚犯困境对策,其对策表见于例 6.2. 令 $P=$ 招供,$N=$ 拒供. 直接看出(P,P) 是 Nash 均衡. 设有一 Nash 均衡 σ 表如式(6-10)(当然其中 P,N 已另有含义),若 $0<\alpha<1$,则

$$-5\beta-\beta'=u_1(P,\sigma_2)=u_1(N,\sigma_2)=-10\beta-2\beta',$$

由此解出 $\beta=-1/4$,得出矛盾. 同理,亦不可能 $0<\beta<1$. 故(P,P) 是唯一的 Nash 均衡. 这就得出了与例 6.2 同样的结论:囚犯的理性选择只能是招供,其中任一个人都不会指望其同案犯有相反的选择.

以上例子中,尽管纯策略 Nash 均衡不是总存在,但混合策略 Nash 均衡却无例外地存在. 这并非偶然,因一般地成立.

定理 6.1 若每个 S_i 为有限集,则混合策略 Nash 均衡存在.

证 这是 Kakutani 不动点定理的又一次应用(参见 4.2.2 小节).

1° 构造多值映射 $F:\Sigma\to\Sigma$. 对任给 $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})\in\Sigma$,令

$$F_i(\sigma_{-i})=\{\bar{\sigma}_i\in\Sigma_i:u_i(\bar{\sigma}_i,\sigma_{-i})=\max_{\sigma_i'\in\Sigma_i}u_i(\sigma_i',\sigma_{-i})\};$$

$$F(\sigma)=F_1(\sigma_{-1})\times\cdots\times F_I(\sigma_{-I}).$$

因每个 Σ_i 是紧凸集,故 Σ 为紧凸集,且连续函数 $u_i(\cdot,\sigma_{-i})$ 必在 Σ_i 上取得最大值,因而 $F_i(\sigma_{-i})\neq\varnothing$. 因 $u_i(\cdot,\sigma_{-i})$ 是凸集 Σ_i 上的线性函数,故 $F_i(\sigma_{-i})$ 为凸集,从而 $F(\sigma)$ 是非空凸集.

2° 证 F 上半连续. 设 $\bar{\sigma}^n\in F\sigma^n,\sigma^n\to\sigma,\bar{\sigma}^n\to\bar{\sigma}(n\to\infty)$. 由

$$u_i(\bar{\sigma}_i^n,\sigma_{-i}^n)\geqslant u_i(\sigma_i',\sigma_{-i}^n)\quad(\forall\ \sigma_i'\in\Sigma_i)$$

取极限得

$$u_i(\bar{\sigma}_i,\sigma_{-i})\geqslant u_i(\sigma_i',\sigma_{-i})\quad(\forall\ \sigma_i'\in\Sigma_i),$$

这表明 $\bar{\sigma}_i\in F_i(\sigma_{-i})(1\leqslant i\leqslant I)$,因而 $\bar{\sigma}\in F\sigma$.

3° 由 Kakutani 定理,有 $\sigma\in\Sigma$,使 $\sigma\in F\sigma$. 直接由 F 的定义看出 σ 是 Nash 均衡. □

6.3 动态对策

行为逐次展开的对策称为动态对策，它是实际经济活动中所见的主要对策形式. 对于动态对策，仅依靠它的正规型表示及其 Nash 均衡，未必能可靠地预告其结局，这就需要某些更精细的分析.

以下设 Γ_E 是一个给定的展开型对策.

6.3.1 子对策完备 Nash 均衡

在 6.1.3 小节中已经指明，Γ_E 确定地导出一个正规型对策 Γ_N. 现在的问题是，Γ_N 的一个 Nash 均衡是否表示 Γ_E 的一个可信的结局? 首先看以下这个很具启发性的例子.

例 6.5(厂商争夺对策)　设厂商 1 试图进入原由厂商 2 独占

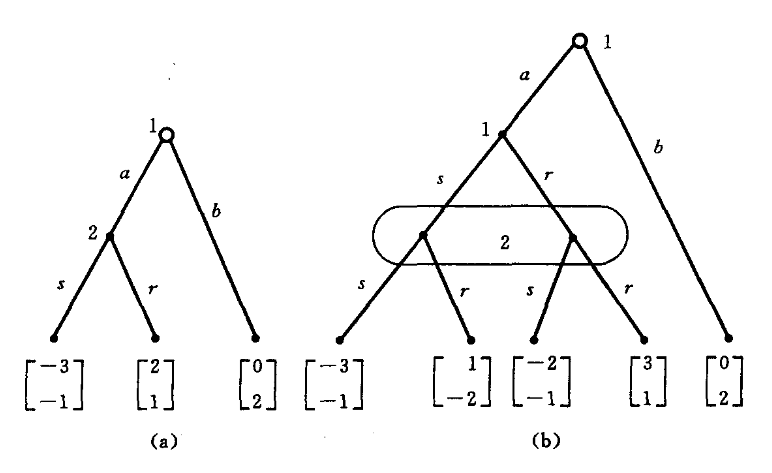


图 6-3

的行业. 厂商 1 有两种选择：进入(a) 与不进入(b). 一旦 1 已进入，则厂商 2 可选择排斥(s) 与容纳(r). 这个对策的对策树如图

6-3(a). 图 6-3(b) 给出(a) 的一个变形：厂商 1 进入后，两厂商同时互相独立地选择 s 或 r. 下面分别以厂商争夺对策 A,B 来称呼如上两个对策，它们的对策表如下所示. 其中厂商 2 的策略 s = "若 1 进入则排斥"；厂商 1 的策略 as = (进入，若进入则排斥 2)；其余类推. 你当记得，我们已约定对策表左侧列出局中人 1 的策略，而上方则列出局中人 2 的策略. 直接看出，对策 A 以 (a,r), (b,s) 为 Nash 均衡. 直观上，一旦厂商 1 进入，厂商 2 必选择较有利的 r，而这一点又必被理性的 1 正确地预见到，因而 1 不可能选择 b. 因此 (a,r) 确为可信的结局，而 (b,s) 则是不可信的. 可将 (b,s) 理解为：厂商 2 以选择 s 相威胁，试图促使 1 选择 b，但这种威胁没产生效果. 类似地，可指出对策 B 有 3 个 Nash 均衡 (ar,r), (bs,s), (br,s)，其中仅有 (ar,r) 是可信的结局.

对策 A

	s	r
a	−3, −1	2,1
b	0, 2	0, 2

(a)

对策 B

	s	r
as	−3, −1	1, −2
ar	−2, −1	3, 1
bs	0, 2	0, 2
br	0, 2	0, 2

(b)

以上例子表明，动态对策的某些 Nash 均衡不提供可信的结局，应予以剔除. 例 6.5 的分析也表明，应排除的 Nash 均衡(如 (b,s)) 局限在对策的某一部分(如在 2 的决策点处) 并不具有最优性. 这启示出以下定义.

定义 6.6(Selten,1965)　1° Γ_E 的一个子集 G 称为一个子对策，若 G 从 Γ_E 的某个节点 x 出发，x 单独成一信息集，且 G 正好包含 x 的所有后继节点；Γ_E 的任何信息集要么含于 G，要么与 G 不相交.

2° 若一策略组合 σ 限制在子对策 G 上考虑时构成一个 Nash

均衡，则说 σ 在 G 中导出一个 Nash 均衡. 若 σ 在 Γ_E 的每个子对策中导出一个 Nash 均衡，则称 σ 为 Γ_E 的子对策完备 Nash 均衡，简称为 SPNE.

因 Γ_E 本身就是一个子对策，故 Γ_E 的 SPNE 当然是 Nash 均衡，但它通常是很特殊的 Nash 均衡. 这种特殊的 Nash 均衡，正是我们指望用来表示动态对策的可信结局的东西.

现在再来看例 6.5 对策 A 有两个子对策，除了自身之外，另一个子对策即由 2 的决策点出发的对策. 显然，(a,r) 在其中导出一个 Nash 均衡，而 (b,s) 则不是. 因此 (a,r) 是 SPNE 而 (b,s) 不是. 类似地，对策 B 亦有两个子对策，(ar,r) 是唯一的 SPNE.

有一个直观上很自然的程序用来确定 SPNE. 为简单起见，假定 Γ_E 是完备信息的. 从尾端回溯到前一决策点，砍去所有从该点发出的树枝，使该点成为新的尾端，该处的收益就是从该点出发的子对策的 Nash 均衡的收益. 这就得到一个节点较少的对策，称为约化对策. 重复上述程序，最后得到一个仅有一个决策点的约化对策，它的 Nash 均衡正对应 Γ_E 的一个 SPNE. 以上程序，称为反向归约程序. 一个一般的定理如下.

定理 6.2(Zermelo)　若 Γ_E 是完备信息的有限对策，则通过反向归约程序可导出一个纯策略 Nash 均衡；当每个局中人在不同尾端有不同收益时，所导出的 Nash 均衡是惟一的.

由定理 6.2 直接推出：完备信息的有限对策必有 SPNE；当其局中人在不同尾端有不同收益时，有惟一 SPNE.

对于例 6.5 中的对策 A，砍掉 2 的决策点发出的树枝，得到如图 6-4 所示的约化对策. 其中左边尾端的收益是这样确定的：在从该点出发的子对策中，2 显然选择 r. 在约化对策中，1 显然选择 a，以得到较大的收益 2. 这表明 (a,r) 是 SPNE.

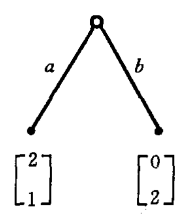


图 6-4

对于不完备信息的有限对策，亦可建立一种类似的反向归约程序，用以得出 SPNE. 简单地

说，对于完备信息的有限对策，反向归约程序是从尾端开始逐次砍去树枝；而对于不完备信息的有限对策，则是从尾端开始依次砍去子对策，得出越来越简单的约化对策.

6.3.2 弱完备 Bayes 均衡

上段的讨论似乎表明 SPNE 概念已成功地解决了动态对策的可信结局问题. 但下述简单例子提出了新的挑战.

例 6.6（厂商争夺对策 C） 对厂商争夺对策 A 作如下修改：厂商 1 有两种进入策略 a_1, a_2，厂商 2 对 1 进入的反应依然是 s, r，但他并不了解 1 所选择的进入方式. 对策树如图 6-5 所示. 其对策

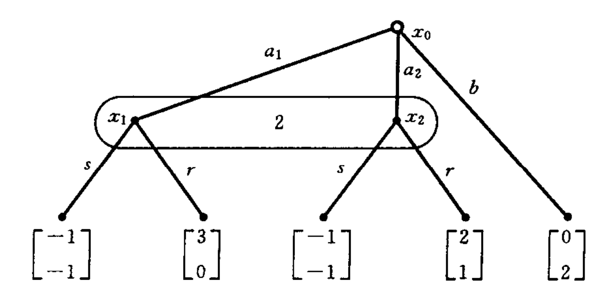


图 6-5

表如下所示. 直接看出，其中(a_1, r) 与(b, s) 是两个 Nash 均衡. 因除自身外不存在其他子对策，(a_1, r) 与(b, s) 同时也都是 SPNE；另一方面，用如同分析厂商争夺对策 A 一样的推理得出，仅有(a_1, r) 是可信的结局. 这就表明，即使 SPNE，亦未必提供可信的结局.

	s	r
a_1	−1, −1	3,0
a_2	−1, −1	2,1
b	0,2	0,2

这就提出一个问题：有什么新的原则用来排除如(b, s) 这样的不合理的均衡？一个思路是，对于 1 选择 a_1 与 a_2 的某种概率分布，或许能用来比较(a_1, r) 与(b, s). 这一想法引出一连串的概念.

定义 6.7 1° 一个函数 $\mu(\cdot): X\backslash T \to [0,1]$(记号依定义 6.2) 称为一组信用,若对每个信息集 H,有 $\sum_{x\in H}\mu(x)=1$;$\mu(x)$ 可看做局中人 i(假定 H 属于 i) 所估计的导向 x 的行为之概率.

2° 对给定的信用 μ,策略组合 $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$,信息集 H(假定 H 属于 i),以 $E[u_i|H,\mu,\sigma]$ 记局中人 i 从 H 开始的期望效用.若

$$E[u_i|H,\mu,\sigma_i,\sigma_{-i}] \geqslant E[u_i|H,\mu,\sigma_i',\sigma_{-i}] \quad (\forall\ \sigma_i' \in \Sigma_i),$$

则说 σ 在 H 是序列合理的.若 σ 在所有信息集是序列合理的,则说 σ 对于 μ 是序列合理的.

3° 设 σ 是一策略组合.若存在一组信用 μ,使得 σ 对于 μ 是序列合理的,且当信息集 H 满足 $\text{Prob}(H|\sigma)>0$ 时成立

$$\mu(x)=\text{Prob}(x|\sigma)/\text{Prob}(H|\sigma) \quad (\forall\ x\in H) \qquad (6\text{-}11)$$

(这意味着 μ 通过 Bayes 规则由 σ 导出),则称 σ 为弱完备 Bayes 均衡(WPBE).

下面的命题说明了 WPBE 与 Nash 均衡之间的关系.

命题 6.3 一策略组合 σ 是 Nash 均衡的充要条件是存在信用 μ,对满足 $\text{Prob}(H|\sigma)>0$ 的任何信息集 H,σ 在 H 是序列合理的,且满足条件(6-11).

这就表明,WPBE 必定是 Nash 均衡;反之则未必.引进 WPBE 的目的,就在于从 Nash 均衡中挑选出"更具序列合理性"的特殊均衡.下面用具体例子来说明,WPBE 概念是否能达到这一目的.

继续讨论厂商争夺对策 C(例 6.6).前面已经指出 (a_1,r) 与 (b,s) 是两个 Nash 均衡.下面指明:

(1) (a_1,r) 是 WPBE.定义如下的信用 μ

$$\mu(x_0)=\mu(x_1)=1,\quad \mu(x_2)=0.$$

该对策有两个信息集:$H_0=\{x_0\}$,$H=\{x_1,x_2\}$.算出

$E[u_1|H_0,\mu,a_1,r]=3$;

$E[u_1|H_0,\mu,\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda b,r]=3\lambda_1$;

$E[u_2|H,\mu,a_1,r]=0$;

$E[u_2|H,\mu,a_1,t_1s+t_2r]=-t_1$,

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda,t_1,t_2\geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2+\lambda=t_1+t_2=1$. 显然 $3\geqslant 3\lambda_1$，$0\geqslant -t_1$，这就验证了(a_1,r)的序列合理性. 其次，令 $\sigma=(a_1,r)$，则

$$\text{Prob}(H_0|\sigma)=\text{Prob}(H|\sigma)=\text{Prob}(x_1|\sigma)=1,$$

$\text{Prob}(x_2|\sigma)=0$，由此推出式(6-11)满足. 因此$(a_1,r)$是 WPBE.

(2) (b,s)不是 WPBE. 设μ是任给的信用，则必$\mu(x_0)=1$，设$\mu_i=\mu(x_i)(i=1,2)$，则恒有

$$E[u_2|H,\mu,b,s]=-1<\mu_2=E[u_2|H,\mu,b,r],$$

可见(b,s)在 H 不是序列合理的，因而不是 WPBE.

第七章 外部性与公共物品

到现在为止，当谈及市场时我们总假定它是完全的. 在建立均衡理论时，尤其强调市场的完全性(参见 4.1 节). 让我们回顾一下，市场完全性所包含的主要条件.

(1) 内部性：所有直接影响经济人的效用或收益的因素都来自市场内部，并依据同样的市场规则进行交易；

(2) 竞争性：所有交易者都是市场价格的接受者，没有人具有制定或影响价格的市场力；

(3) 完全信息：交易者对于市场结构及所交易的商品(消费品与生产要素)具有同等的完全信息.

实际上，只有在理想状态下，以上条件才得以满足. 在现实的经济活动中，条件(1)～(3)至多只能被近似地满足，有时则被明显地违背，以至使基于这些条件的一般均衡理论的结论不再有效，特别，使"竞争均衡是 Pareto 最优"这一令人欣慰的结论成为问题. 在这种情况下，经济学家惊呼市场失灵了！导致市场失灵的 3 种主要情况就是外部性、垄断与非对称信息，它们正好是内部性、竞争性与完全信息的反面. 本章专门考虑外部性，主要课题是研究存在外部性的情况下，市场均衡的性质及与之相关的政策分析.

7.1 双边外部性

7.1.1 外部性概念

要理解外部性，首先应当分析与之相对的内部性. 如在本章引

言中已指出的，在一完全市场中，经济人（消费者与厂商）所接受的消费品与要素全部来自市场内部，且在一定市场价格下由各经济人自由选购；而经济人要出手的物品与服务亦需在市场内部依市场价格出售. 除此之外，任何经济人不再有对其他经济人的消费效用或生产收益造成直接影响的行为. 换言之，在经济人之间，任何直接影响到彼此的效用与收益的行为，都必须在竞争性的市场交易中完成. 如果上述状况被破坏，就意味着外部性出现.

因此，可以将外部性界定为经济人的一种行为，它具备下述特征.

(1) 承受该行为的消费者增加效用（正外部性）或减少效用（负外部性）；承受该行为的厂商增加收益（正外部性）或减少收益（负外部性）；

(2) 该行为的发生与承受者的意愿无关；

(3) 承受正（或负）外部性行为的经济人不按市场规则支付费用（或获取补偿）.

作了这番冗长的议论之后，现在该谈到外部性的实例了. 在现实的经济生活中，外部性的事例随处可见.

正外部性. 对于消费者有：拥挤社区中居民的迁出；社区成员在住宅周围植树种花；隔壁住户改进排气设备；高雅邻居的迁入；义务维护环境卫生，如此等等. 对于厂商有：改善交通条件；免费提供加工业副产物；免费提供市场信息；为职工设立文化生活场所；为职工子女就读提供方便，如此等等.

负外部性. 对于消费者有：拥挤社区中居民的迁入；社区成员喂养破坏环境的宠物；邻居无节制的喧闹；缺乏公德的邻居的迁入；损害公共卫生或污染环境，如此等等. 对于厂商有：污染水或其他资源；急剧增加人口导致交通条件恶化；破坏环境、增加水患威胁等等.

重要的是，不要将增进或减少经济人福利的市场行为当做外部性. 例如，一家营业性歌舞厅对于付费娱乐者来说，是服务提供

者，其行为受市场规则支配，因而并无外部性. 但对于极端传统的人士来说，追赶时尚的歌舞厅中的喧嚣会给他们带来不快，且不可能获得补偿，因而是一种外部性.

最后这个例子已表现出外部性问题的复杂性：它往往与市场行为交织在一起，难以画出分明的界线. 而且，外部性具有极其多样的表现形式，其作用很难准确测定，对于市场均衡所带来的影响也十分复杂. 只有在很简单的情况下，或者作了很强的人为简化之后，才能建立合适的数学模型. 本节所考虑的两人模型，就是高度简化的结果.

7.1.2 两人模型

设经济人 $i=1,2$ 同处于一个规模很大的市场中，其中 2 受到来自 1 的外部性行为的影响，该行为由实参数 $h\in\mathbf{R}_+$ 测定. 为确定起见，不妨设 1,2 均为消费者. 其他情况可类似处理. 设他们只消费一种商品 m，其价格为 1. 如同在 4.4.1 小节中一样，m 可看做一种复合商品；因其价格相对于 h 不变，故可标准化为 1. 亦如 4.4.1 小节中一样，设 i 有拟线性形式的效用函数①

$$u_i(m_i,h)=m_i+\varphi_i(h),\quad i=1,2. \tag{7-1}$$

假定 $\varphi_i(\cdot)\in C^2$ 且满足条件

$$\varphi_2'(\cdot)\neq 0,\quad \varphi_i''(\cdot)<0,\quad i=1,2, \tag{7-2}$$

其中，$\varphi_2'(\cdot)\neq 0$ 表示 2 肯定受到外部性的影响；$\varphi_i''(\cdot)<0$ 则表示 u_i 对 h 的依赖随 h 增长而下降.

对于 h，可考虑两种不同的最优水平.

1. 均衡水平 h^*

在没有其他约束的情况下，消费者 1 必定选择 $h=h^*$，使之解效用最大化问题，即

$$\max_{h\geqslant 0}[m_1+\varphi_1(h)]. \tag{7-3}$$

---

① 这一形式已隐含效用依货币计量的结论.

因 $\varphi_1(\cdot)$ 是凹函数，故 h^* 是问题(7-3) 的解的充要条件是

$$\varphi_1'(h^*) \leqslant 0, \quad 当 h^* > 0 时 \varphi_1'(h^*) = 0. \tag{7-4}$$

注意，消费者 2 并无选择 h 的自由，h^* 也未必最大化 2 的效用，因而 h^* 并不是 4.4 节意义下的竞争均衡. 不过，为方便起见，仍然约定称 h^* 为均衡水平.

2. 最优水平 h°

即 Pareto 最优水平，它是两目标最大化问题

$$\max_{h\geqslant 0}(\varphi_1(h),\varphi_2(h)) \tag{7-5}$$

的解. 因 $\varphi_i(\cdot)$ 皆为凹函数，故问题(7-5)可转化为一个等价的单目标最大化问题(参见 4.1.3 小节)

$$\max_{h\geqslant 0}[\rho_1\varphi_1(h) + \rho_2\varphi_2(h)], \tag{7-6}$$

其中，ρ_1,ρ_2 是适当的正常数. 因此，h° 应满足一阶条件

$$\rho_1\varphi_1'(h^\circ) + \rho_2\varphi_2'(h^\circ) \leqslant 0, \quad 当 h^\circ > 0 时等式成立. \tag{7-7}$$

现在来比较 h^* 与 h°. 若 h 是正外部性(即 $\varphi_2'(\cdot) > 0$)，$h^\circ > 0$，则必 $h^* < h^\circ$. 否则 $h^* \geqslant h^\circ > 0$，这将推出

$$\begin{aligned} 0 < \rho_2\varphi_2'(h^\circ) &= -\rho_1\varphi_1'(h^\circ) && (用式(7\text{-}7)) \\ &\leqslant -\rho_1\varphi_1'(h^*) = 0, && (用式(7\text{-}2)、(7\text{-}4)) \end{aligned}$$

得出矛盾. 类似地，若 h 是负外部性，$h^* > 0$，则必 $h^\circ < h^*$. 总之，不论在哪种情况下，h^* 都朝坏的方向偏离 h°.

7.1.3 政府干预

对于上段讨论的两人经济，效用最大化原则 —— 堂皇地说就是市场力量 —— 并不能促使消费者 1 选择最优水平 h°. 简而言之，就是市场不能依靠自身实现最优，市场果然失灵了！这就需要市场以外的力量来干预，这种力量通常来自政府. 常见的干预方法有 3 种，它们各有特点，分别讨论如下.

1. 限额

若 h 是负外部性，于是 $h^* > h^\circ$，则最简单的控制办法是政府

直接限定 $h \leqslant h^\circ$,而结果是消费者 1 选择 $h = h^\circ$.

这一看似简单的方法实行起来未必简单. 首先,政府所掌握的信息未必足以准确地决定最优水平 h°;其次,政府亦未必有足够的监控手段用来保证限额的实现. 例如,你能想象限制每人制造的噪音不超过某一限额吗?

2. 税收

设政府对消费者 1 的负外部性行为课税,税率为 t. 税收促使消费者 1 重新考虑自己的选择,现在他解不同于式(7-3)的最大化问题

$$\max_{h\geqslant 0}[\varphi_1(h) - th]. \tag{7-8}$$

直接看出,若取 $t = \varphi_1'(h^\circ)$,则 $h = h^\circ$ 就是问题(7-8) 的解. 由此可见,选择税率 $t = \varphi_1'(h^\circ)$ 就能达到实现最优水平 h° 的目的. 以上税收是英国经济学家 Pigou(1877—1959)于 1932 年提议的,因而称为 Pigou 税. 这一方法的明显问题是:你如何去确定 $\varphi_1'(h^\circ)$ 呢?

税收控制的特点是,行为 h 的主体基于自身的利益,直接对课税作出了反应. 如果错设了课税对象,将无助于控制 h. 例如,为控制噪音而对录音机厂家或销售商课税,是绝不会有效果的.

若 h 是正外部性,则只要将税收改为补贴,以上的分析依然有效.

3. 鼓励协商

设消费者 2 已由法律或主流的社会价值观念赋予某种权利,使之免受外部性 h 之苦. 但政府不是用强制办法去阻止消费者 1 产生 h,而是鼓励消费者 1 与消费者 2 通过协商达成一笔交易:消费者 1 对消费者 2 支付一笔费用 T,用以购得维持 h 的权利. T 必须是消费者 1 可承受的,即满足 $\varphi_1(h) - T \geqslant \varphi_1(0)$. 消费者 2 所能接受的 h 必须解以下最大化问题

$$\begin{cases}\max\ [\varphi_2(h) + T], \\ \text{s.t.}\ \ \varphi_1(h) - T \geqslant \varphi_1(0), \quad h \geqslant 0.\end{cases} \tag{7-9}$$

若 $\bar{h} > 0$ 是问题(7-9) 的解,则 $\bar{h}$ 应满足一阶条件

$$\varphi_1'(\bar{h}) + \varphi_2'(\bar{h}) = 0,$$

这与式(7-7)比较得出 $\bar{h} = h^\circ$. 由此可见,通过协商能实现最优水平 h°,付费 T 也随之确定:$T = \varphi_1(h^\circ) - \varphi_1(0)$.

方法 2 与 3 的共同点是:消费者 1 支付一笔费用(税收 th 或 T)"购得"h. 这就相当于将 h 的确定纳入了市场交易的轨道;或者说,将一个本来是外部的问题内部化了. 而内部化的必然结果是,均衡在最优水平处实现.

最后,应当注意,以上 3 种方法的共同前提是对外部性有可靠的数量测定. 如果这种测定在技术上不可能,或者成本过高,那么这些方法就难以实行.

7.2 公共物品

7.2.1 公共物品概念

在上节中,我们讨论了噪音、环境污染之类的外部因素的影响与机制. 在这类外部性起作用的地方,市场不再是一种自动实现社会最优的令人敬畏的力量. 现在,我们要考察另一种同样使市场乏力的东西. 此刻,你或许正端坐于宽敞明亮的阅览室中,尽情地享受着它所提供的舒适与便利. 你并不耽心,由于他人的竞争,你将无力承受这一消费,因为你正在使用十分特殊的商品:它能被许多人共同使用且用之不竭,它是一件公共物品.

几乎不必更多地解释,你在直觉中已意识到公共物品是什么. 但这并不意味着,能以数学的严格性给出一个完全形式化的定义. 我们只满足于一个如下的直观描述:一个人使用并不妨碍他人同时使用的物品称为公共物品. 公共物品的基本特征如下.

(1) 非排他性:一个人使用不妨碍他人同时使用;

(2) 无损耗性:个人的使用不导致其数量的减少(或增加).

与公共物品相对的私人物品则与此相反,后者既是排他性的

(例如,你不能与他人共穿一件衣服),也是损耗性的(例如,你已喝过的茅台,再也无法完整地留给他人).

现在,我们已可开出一个公共物品的单子了.图书馆、公园、公路、桥梁、堤坝等有形的公共设施自不必说;更一般一点,可加进城市景观、森林、草原、清洁空气等地理环境方面的东西;其次就是公开传播的知识、技术、信息、电视、广播及其他精神产品;也包括公安、国防等高度综合性的事项.你看出这些都是公益品.实际上,公共物品也应包括公害品,例如噪声、垃圾、废气、洪水、被污染环境等等.

容易注意到,像森林、广场之类的物品其自然属性即带有公共物品的特征.但从根本上说,公共物品与私人物品的区分不取决于自然属性,而取决于使用方式.例如,一幅画挂在博物馆中展出让人欣赏,它是公共物品;而在收藏家手中却是私人物品.

还应注意到,严格地具有非排他性与无损耗性的公共物品,是种理想化的东西,可称之为纯公共物品.现实的公共物品多少带有排他性与损耗性的痕迹.例如,一个空旷的广场与一个拥挤的广场是很不一样的;新开放的阅览室与用旧的阅览室亦非毫无区别.

上面没有提到公共物品的生产、交易与所有权.这是一个较复杂的问题,难以给出一个普遍适用的描述.首先,我们认定公共物品的获得都需要成本;其次,公共物品可由一个厂商或多个厂商生产;进入使用状态的公共物品,可能置于某个机构的管理之下(例如文化部门管理的图书馆),亦可能并无所属(如废气).个人消费公共物品可能是主动的(如进入图书馆、接受某项知识),亦可能是被动的(如接受某一治安环境、吸入被污染空气).在所有情况下,都认为个人对公共物品是不付费的.你会立即反驳:许多公益设施恰好是收费的.在这种情况下可以说,该项收费非常低廉,它既不能补偿成本,也不致影响个人对该物品的需求,因而可以认定所有个体对该物品有等量的消费.如果收费超出象征性的水平,致使其生产与消费完全决定于市场供求关系,那么,就不应当作公共物品

处理了.例如,初看起来似令人惊奇:公共汽车就不是公共物品!同样,完全营利性的公园也不应看做公共物品.

考虑到上述的种种复杂性,可以想见,对于公共物品的一个完全形式化的处理并不容易.下面给出几个简单的数学模型,它们远不能概括所有重要的情况,但其分析能够显示处理这类问题的方法特色.

7.2.2 最优性与均衡

设 I 个消费者消费一个公共物品.为确定起见,假定该物品是公益品,且 $I>1$.对于公害品的情况可类似处理.设每个消费者 $i(1\leqslant i\leqslant I)$ 有用货币计量的效用函数 $\varphi_i(q_i)$,q_i 是 i 消费公共物品的数量.假定 $\varphi_i(\cdot)$ 满足如下条件(参见式(4-26))

$$\varphi_i'(\cdot)>0,\quad \varphi_i''(\cdot)<0\quad (1\leqslant i\leqslant I).\tag{7-10}$$

对于公害品,应将 $\varphi_i'(\cdot)>0$ 改为 $\varphi_i'(\cdot)<0$.假定公共物品由某厂商(可理解为代表生产者,参见3.2.5小节)生产,其成本函数 $c(q)$ 满足条件(参见式(4-27))

$$c'(\cdot)>0,\quad c''(\cdot)>0.\tag{7-11}$$

对于公害品,$c(q)$ 理解为清除成本,此时有 $c'(\cdot)<0$.

下面分别考虑公共物品总供应量 q 的最优水平与均衡水平.

1. 最优水平 q°

公共物品的特性决定了消费者 i 的消费量 q_i 与 i 无关,即 $q_i=q$ (这是要点!).回忆4.4.3小节中的分析,Pareto最优配置应最大化Marshall总剩余.因此,q° 是以下最大化问题的解

$$\max_{q\geqslant 0}\sum_i \varphi_i(q)-c(q).\tag{7-12}$$

由此立即得出 q° 应满足的充分必要的一阶条件为

$$\sum_i \varphi_i'(q^\circ)\leqslant c'(q^\circ),\quad \text{当 } q^\circ>0 \text{ 时等式成立}.\tag{7-13}$$

以上条件由Samuelson于1954年导出.注意假定 $q_i=q$ 对于导出条件(7-13)是关键的.如果无此假定,将得到很不相同的结果(比

较式(7-13)与式(4-31)、(4-32)).

2. 均衡水平 q^*

因在通常的情况下，消费者并非从一个竞争市场中获得所需的 q_i，要讨论市场均衡似乎是很勉强的. 我们只能作如下的假设：存在一个公共物品的竞争市场，每个消费者 i 可在同一市场价格 p 下购置自己所需的 $q_i \geqslant 0, q = \sum q_i$. 例如，你不妨想象 q 是 I 个消费者共有的一块绿地上的种草量，其中 q_i 由消费者 i 购置，但一旦购置以后就无条件地由众人共享. 设 p^*, q_i^* 分别为均衡价格与均衡消费量，$q^* = \sum q_i^*$，则 q_i^* 与 q^* 分别解效用最大化问题

$$\max_{q_i \geqslant 0}\left[\varphi_i\left(q_i + \sum_{k \neq i} q_k^*\right) - p^* q_i\right] \tag{7-14}$$

与利润最大化问题

$$\max_{q \geqslant 0}[p^* q - c(q)] \tag{7-15}$$

(参见 4.1.1 与 4.4.1 小节). 由此得出 q_i^*, q^* 所满足的充分必要的一阶条件为

$$\varphi_i'(q^*) \leqslant p^*, \quad \text{当 } q_i^* > 0 \text{ 时等式成立；} \tag{7-16}$$

$$p^* \leqslant c'(q^*), \quad \text{当 } q^* > 0 \text{ 时等式成立.} \tag{7-17}$$

将式(7-16)、(7-17)合起来得到

$$\varphi_i'(q^*) \leqslant c'(q^*), \quad \text{当 } q_i^* > 0 \text{ 时等式成立.} \tag{7-18}$$

若 $q^\circ > 0$，则必 $q^* < q^\circ$. 否则 $q^* \geqslant q^\circ > 0$，从而有某个 $q_i^* > 0$，这将推出

$$c'(q^\circ) \leqslant c'(q^*) = \varphi_i'(q^*) \leqslant \varphi_i'(q^\circ) \text{(用式(7-11)、(7-18)、(7-10))}$$
$$< \sum_i \varphi_i'(q^\circ) = c'(q^\circ), \qquad \text{(用式(7-13))}$$

得出矛盾.

以上分析表明，如果依靠私人的分散决策来置办公益品，必定达不到社会最优水平. 实际上，私人置办的后果还不仅如此. 假定各消费者对于该公共物品的关切并不一样，这意味着 $\varphi_i'(\cdot)$ 互有差异，不妨设

$$\varphi_1'(\cdot) < \varphi_2'(\cdot) < \cdots < \varphi_I'(\cdot).$$

取 $q_1^* = \cdots = q_{I-1}^* = 0, q_I^* = q^* > 0$，则条件(7-16)、(7-17)同时被满足且 $\varphi_I'(q^*) = c'(q^*)$. 这样，全部 q^* 都由最热心的消费者 I 置办，其他人实际上只是免费搭车者而已.

还是考虑公共草地这个例子. 试想象一下，如果你并不是最看重草地的人，而一旦更爱草地的人铺好草坪之后你同样可以免费受用，你会乐得让那个最爱草地的人独自去种草. 但这样一来，你就只能享受到较低水平的公共草地了.

值得注意的是，私人置办公共物品导致市场失灵的机制，本质上与外部性的情况一样. 实际上，一个人置办的公共物品使所有消费者获得效用，这正是一种外部性.

3. Lindahl 均衡水平 q^{**}

瑞典经济学家 Lindahl 于 1919 年提出一个公共物品模型，使得均衡水平能与最优水平一致. 他假定每个消费者用市场价格 p_i 购得个性化的公共物品 q_i. 设 $p_i^{**}, q_i^{**}, q^{**}$ 分别为均衡价格、均衡需求与均衡供给，则必 $q_i^{**} = q^{**}$，q_i^{**} 与 q^{**} 分别解如下的最大化问题

$$\max_{q_i \geqslant 0} \varphi_i(q_i) - p_i^{**} q_i$$

与

$$\max_{q \geqslant 0} \sum_i p_i^{**} q - c(q).$$

因此 q^{**} 满足一阶条件为

$$\varphi_i'(q^{**}) \leqslant p_i^{**}, \quad \text{当 } q^{**} > 0 \text{ 时等式成立；}$$

$$\sum_i p_i^{**} \leqslant c'(q^{**}), \quad \text{当 } q^{**} > 0 \text{ 时等式成立.}$$

以上条件又等价于

$$\sum_i \varphi_i'(q^{**}) \leqslant c'(q^{**}), \quad \text{当 } q^{**} > 0 \text{ 时等式成立.}$$

以此与式(7-13)对照看出 $q^{**} = q^\circ$.

尽管 Lindahl 在纸面上将最优水平 q° 解释成了某种均衡水

平，但他的模型中所虚拟的个性化公共物品的市场很难说是现实的.

7.2.3 政府干预

在上段中得出了并不惊人的结论：仅依靠市场力量置办公共物品，达不到社会最优水平，因而某种政府干预成为必要. 因为此处面临的情况与外部性问题颇为相似，因而有关的讨论也大体相同，故不拟详细展开.

政府干预的两种主要方式如下.

1. 公营

政府直接从公共开支中拨款购买社会最优水平 q° 的公益品，提供给消费者无偿使用；或者政府直接出资控制公害，使其保持在社会最优水平 q°. 这些都已成为现代国家中政府的主要职能.

2. 补贴

考虑 $I=\{1,2\}$ 这种最简单的情况. 设政府对消费者 i 购买每单位公共物品补助 s_i 元，p^*，q_i^* 仍然表示均衡价格与均衡消费，$q^*=q_1^*+q_2^*$，则代替问题(7-14)，q_i^* 解最大化问题即为

$$\max_{q_i\geqslant 0}\varphi_i(q_i+q_{-i}^*)+s_iq_i-p^*q_i.$$

相应的一阶条件是

$$\varphi_i'(q^*)+s_i\leqslant p^*,\quad \text{当 } q_i^*>0 \text{ 时等式成立.}\qquad (7\text{-}19)$$

取 $q^*=q^{\circ}>0$，$s_i=\varphi_{-i}'(q^{\circ})$，恰使条件(7-19)满足. 这就表明，政府适当地对置办公益品的私人进行补贴，能实现社会最优水平.

7.3 多边外部性

7.3.1 一般描述

在 7.1 节中我们分析了双边外部性. 你可能颇感惊讶，为什么

没有如我们习惯做的那样，紧接着指出从“双边”到“多边”的过渡不过是一个例行的推广. 实际上，正是在这个过渡的关口处出现了实质上新的因素，致使我们不得不另辟一节，专论多边外部性. 简单说来，如果许多个体同时遭受同一种外部性，就发生这样的问题：外部性在各个体之间将如何配置？如果仅有一个人承受外部性（7.1.2 小节中就是如此），当然不存在这样的问题. 然而在现实生活中，外部性往往同时涉及到大量的人，你只要看看废气排放、水质污染这样一些被人们广为关注的问题就够了.

外部性在其承受者之间如何配置的问题，首先决定于外部性是否具有损耗性. 据此，可区分出两种很不相同的情况. 外部性是可损耗的，意味着它作用于一个人之后，其他人感受到的外部性会少一些. 例如，设一钢铁厂在其周边地区倾倒炉渣，其中一个地区被倾倒一定量的炉渣之后，倒向其他周边地区的炉渣自然就少了. 显然，可损耗外部性具有私人物品的特征. 与此相反，不可损耗的外部性则具有公共物品的特征. 这种外部性的典型例子是工业废气的排放. 不会因为你吸入一部分废气而使空气变得较洁净的！既然上述两种外部性分别类似于私人物品与公共物品，那么就不应奇怪，对于两者得出的结论是如此不同，就如同私人物品与公共物品迥然有别一样.

对于多边外部性问题的形式化处理，无疑比双边问题复杂些. 因此，我们不能不作较多的简化，其中有些简化本质上无损于结论的一般性. 首先，假定外部性的“生产者”与“消费者”是互不重叠的两组个体. 为确定起见，设厂商 $j=1,2,\cdots,J$ 产生外部性，而消费者 $i=1,2,\cdots,I$ 则接受外部性，且 $I>1$（这是关键的！）. 假定厂商的外部性行为对于消费者的影响是同等地可能的，因而不必区分消费者 i 所受到的外部性 $\tilde{h}_i$ 源于何处. 为了集中考虑外部性问题，对于其他商品的交易一概不论，因而可将消费者 i 的效用函数与厂商 j 的利润函数分别简化为 $\varphi_i(\tilde{h}_i)$ 与 $\pi_j(h_j)$（$1\leqslant i\leqslant I, 1\leqslant j\leqslant J$），其中 h_j 是 j 生成的外部性. 假定 $\varphi_i(\cdot), \pi_j(\cdot)\in C^2$ 且满足条件

(参见式(7-2))

$$\varphi_i'(\cdot) < 0, \quad \varphi_i''(\cdot) < 0, \quad \pi_j''(\cdot) < 0. \tag{7-20}$$

$\varphi_i'(\cdot) < 0$ 表明所处理的是负外部性.

7.3.2 可损耗外部性

如前所述,可损耗外部性具有私人物品的特征,因而可指望得出某种类似于通常消费品交易的结论. 如同在 7.1.2 小节中一样,下面分别考虑外部性的均衡水平与最优水平,后者自然指 Pareto 最优水平.

1. 均衡水平 h_j^*

厂商 j 选择 $h_j = h_j^*$,使其利润最大化. 直接看出,h_j^* 满足充分必要的一阶条件

$$\pi_j'(h_j^*) \leqslant 0, \quad \text{当 } h_j^* > 0 \text{ 时等式成立}. \tag{7-21}$$

因消费者没有选择 $\widetilde{h}_i$ 的自由,因此对于 $\widetilde{h}_i$ 不存在均衡问题.

2. 最优水平 $\widetilde{h}_i^\circ, h_j^\circ$

如同在上节中一样,依然用"最优水平最大化 Marshall 剩余"这一原理(参见 4.4.3 小节). 这就得出 $\widetilde{h}_i^\circ, h_j^\circ$ 解最大化问题

$$\begin{cases} \max \sum_i \varphi_i(\widetilde{h}_i) + \sum_j \pi_j(h_j), \\ \text{s.t.} \ \sum_i \widetilde{h}_i = \sum_j h_j, \quad \widetilde{h}_i \geqslant 0, h_j \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J). \end{cases} \tag{7-22}$$

注意 $-\pi_j(\cdot)$ 被看做厂商 j 的成本函数,约束条件 $\sum \widetilde{h}_i = \sum h_j$ 体现了外部性的可损耗性(这是关键!). 依据通常的 Lagrange 乘子方法,得出 $\widetilde{h}_i^\circ, h_j^\circ$ 满足如下充分必要的一阶条件

$$\begin{cases} \varphi_i'(\widetilde{h}_i^\circ) \leqslant \mu, \quad \text{当 } \widetilde{h}_i^\circ > 0 \text{ 时等式成立} (1 \leqslant i \leqslant I); \\ \pi_j'(h_j^\circ) \leqslant -\mu, \quad \text{当 } h_j^\circ > 0 \text{ 时等式成立} (1 \leqslant j \leqslant J), \end{cases} \tag{7-23}$$

其中 μ 是某个乘子. 比较式(7-21)、(7-23) 得出意料中的结论:若

$h_j^* > 0$，则 $h_j^\circ < h_j^*$（对照 7.1.2 小节）. 事实上，若 $h_j^\circ \geqslant h_j^* > 0$，则

$$0 = \pi_j'(h_j^*) \geqslant \pi_j'(h_j^\circ) \qquad \text{（用式(7-21)、(7-20)）}$$
$$= -\mu = -\varphi_i'(\tilde{h}_i^\circ) > 0 \qquad \text{（用式(7-23)、(7-20)）}$$

（由 $\sum_i \tilde{h}_i^\circ = \sum_j h_j^\circ > 0$ 推出存在 i 使 $\tilde{h}_i^\circ > 0$），得出矛盾. 可见无论是双边或多边外部性，在没有政府干预的情况下，竞争均衡都达不到社会最优水平.

注意条件(7-23)与约束条件 $\sum_i \tilde{h}_i^\circ = \sum_j h_j^\circ$ 一起，正好对应4.4节中的局部 Walras 均衡条件(4-31) ～ (4-33)，乘子 μ 对应于 4.4 节中的均衡价格 p^*. 这一类比促使人们思考：$\tilde{h}_i^\circ, h_j^\circ$ 能否看做某一市场竞争的结果？问题在于，能否有一个外部性 h 的竞争市场，从而实际上将外部问题内部化？如果每个消费者已被赋予免受外部性的法定权利，且这种权利得到强制性的维护；而在受到外部性的情况下得到补偿，相应地厂商则支付罚款，补偿与罚款都按同一价格（即 $-\mu$）计算，I, J 大到足以使 μ 不依赖于任何个别消费者与厂商的选择，那么，消费者与厂商都会依据各自的收益最大化原则选择外部性的接受与产生，从而达到一组竞争均衡值，其均衡水平就是上面提到的社会最优水平. 这似乎得出结论：多边外部性的社会最优水平可依靠市场机制来实现. 但谁来保证承受外部性的消费者有获取补偿的权利呢？这必然有赖于一定的制度环境与法律设施，而这些都已越出市场的范畴之外.

7.3.3 不可损耗外部性

现在设外部性是不可损耗的，我们要看均衡水平 h_j^* 及最优水平 h_j° 与可损耗外部性的情况有何不同.

1. 均衡水平 h_j^*

依然由条件(7-21)决定，这是因为，厂商在作选择时并不关心外部性对消费者有何影响，因而外部性是否可损耗完全不是厂

商考虑的因素①.

2. 最优水平 h_j°

在外部性不可损耗的假定下，有 $\tilde{h}_i = \sum h_j \triangleq h$，这相当于外部性被看做是公共物品(参见 7.2.2 小节). 于是，h_j° 解不同于式(7-22)的如下最大化问题

$$\begin{cases} \max \sum_i \varphi_i(h) + \sum_j \pi_j(h_j), \\ \text{s.t.} \sum_j h_j = h, \quad h_j \geqslant 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant J). \end{cases} \tag{7-24}$$

相应的一阶条件是

$$\sum_i \varphi_i'(h^\circ) \leqslant -\pi_j'(h_j^\circ), \quad h_j^\circ > 0 \text{ 时等式成立}(1 \leqslant j \leqslant J) \tag{7-25}$$

(与条件(7-13)对照). 如同可损耗外部性的情况一样，结合条件(7-21)、(7-25)推出，当 $h_j^* > 0$ 时必定 $h_j^\circ < h_j^*$，即最优水平必低于均衡水平.

因为对于消费者并无外部性的市场，故谈不上 $\tilde{h}_i$ 的均衡水平. 如果作类似于 7.2.2 小节中的处理，假定消费者依靠分散化的决策，各自选定 $\tilde{h}_i^*$ 并依某个均衡"价格"p^* 获得补偿 $p^*\tilde{h}_i^*$，则必定导致免费搭车：全部外部性将由那个对外部性最不在乎的消费者承受. 在这种情况下的均衡水平同样会高于社会最优水平.

由此可见，无论从厂商或是从消费者考虑，市场机制都不足以实现外部性的社会最优水平，因而需要政府的干预. 如同双边外部性的情况一样，政府通常通过限额与税收的方法来实现社会最优水平. 所谓限额，就是政府直接指令厂商 j 的外部性不得超过 h_j°. 至于税收，则类似于 Pigou 税，只要令税率

---

① 回忆前面已假定外部性的制造者不会同时为承受者. 如果厂商亦受到外部性之害，那么情况将有所不同.

$$t = -\sum_i \varphi_i'(h^\circ),$$

最优水平 h_j° 就恰好解税后利润最大化问题

$$\max_{h_j \geq 0}[\pi_j(h_j) - th_j]$$

(参照条件(7-25)).

第八章　垄断与非对称信息

本章讨论市场失灵的两种情况：垄断与非对称信息．在寡头垄断的情况下，寡头各自具有一定的市场力，同时在相互竞争中达到对策论意义上的均衡，由此而形成他们的交易价格．在交易者不具备对称信息的情况下，亦在类似的过程中达到某种市场均衡．对于这两种情况，静态或动态的对策模型是自然的分析工具．本章所研究的问题是近年来微观经济分析的最活跃的领域之一．

8.1　垄断与寡头竞争

依据垄断程度递次降低的顺序，传统上市场被分为4种类型：完全垄断（独占）、多头垄断、垄断竞争与完全竞争．本节讨论前两种情况．完全垄断的情况比较简单，而且也日渐少见；多头垄断的情况则要复杂得多，它为应用对策论的精细方法提供了绝好机会．

8.1.1　完全垄断

设某种商品的市场有惟一卖者，称为垄断者．可设想垄断者是生产该商品的独家厂商，或者是垄断经销的专卖商，这对问题并无本质影响；另一方面，市场的买方由大量不具市场力的消费者组成，其总需求函数为 $x(p)$．假定 $x(\cdot)\in C^1$，且满足条件

$$x'(p)<0\quad(0<p<\bar{p}),\qquad x(p)=0\quad(p\geqslant\bar{p}).\tag{8-1}$$

以 $p(q)$ 记 $x(p)$ 之反函数，约定 $p(0)=\bar{p}$（如图8-1）．条件(8-1)推出 $p'(\cdot)<0$，因此 $p(\cdot)$ 严格单调减．设垄断者的成本函数为 $c(q)$，假定 $c(\cdot)\in C^2$ 且满足条件（参见3.3.3小节）

$$c'(\cdot)>0,\quad c''(\cdot)\geqslant 0,\quad c'(0)<\bar{p}.\tag{8-2}$$

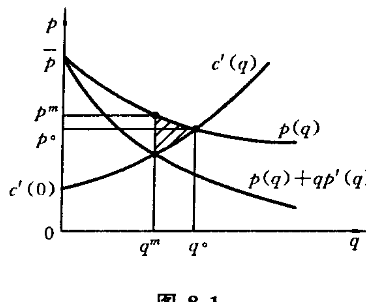


图 8-1

在任何情况下，价格 p 与需求（或供应）量 q 总由关系 $p = p(q)$ 相互唯一决定. 下面分别考虑 p, q 的（社会）最优水平与垄断水平.

1. 最优水平

设想垄断者接受市场均衡价格 p°，然后选择 $q = q^\circ$，使之解利润最大化问题

$$\max_{q \geqslant 0}[p^\circ q - c(q)]. \tag{8-3}$$

因此，q° 满足如下充分必要的一阶条件

$$p^\circ \leqslant c'(q^\circ), \quad \text{当 } q^\circ > 0 \text{ 时等式成立}. \tag{8-4}$$

另一方面，必有 $p^\circ = p(q^\circ)$，这与 $p(0) = \bar{p} > c'(0)$ 及式(8-4)一起推出 $q^\circ > 0$，因而由式(8-4)有

$$p^\circ = p(q^\circ) = c'(q^\circ). \tag{8-5}$$

因 $q^\circ = x(p^\circ)$，故 q° 必为消费者的效用最大化需求. 因此，p°, q° 正是局部均衡意义下的均衡价格与均衡需求(供应). 而由第一基本福利定理，它们同时也是 Pareto 最优配置. 因此，下面称 p°, q° 为(社会)最优水平.

2. 垄断水平

实际上，垄断者在选择其产量时无需遵循任何预定的价格，他唯一关心的是利润最大化，即解最大化问题

$$\max_{q \geqslant 0}[p(q)q - c(q)]. \tag{8-6}$$

设 $q^m \geqslant 0$ 是问题(8-6)的解，则 q^m 满足充分必要条件为

$$p^m + q^m p'(q^m) \leqslant c'(q^m), \quad \text{当 } q^m > 0 \text{ 时等式成立}, \tag{8-7}$$

其中，$p^m = p(q^m)$. 如同 $q^\circ > 0$ 一样易验证 $q^m > 0$，于是必

$$q^m < q^\circ, \quad p^m > p^\circ. \tag{8-8}$$

否则，有 $q^m \geqslant q^\circ, p^m \leqslant p^\circ$，这推出

$$p^m \leqslant c'(q^\circ) \leqslant c'(q^m) \qquad \text{(用式(8-5)、(8-2))}$$

$$= p^m + q^m p'(q^m) < p^m, \qquad \text{(用式(8-7)、(8-1))}$$

得出矛盾. p^m 与 q^m 分别称为垄断价格与垄断产量,不等式(8-8)表明 p^m, q^m 都朝坏的方向严格偏离社会最优水平,这就论证了垄断的无效性.垄断给社会带来的福利损失通常称为垄断的无谓损失;依式(4-50),这个损失可表为积分

$$\int_{q^m}^{q^\circ} [p(q) - c'(q)]\mathrm{d}q. \tag{8-9}$$

在图 8-1 中,积分式(8-9)由阴影线标出的三角形面积表示.

例 8.1 取 $p(q) = a - bq, c(q) = cq, a, b, c$ 为正常数,且 $a > c$. 以这些表达式代入式(8-5)解出 p°, q°;类似地从式(8-7)解出 p^m, q^m(注意已指明式(8-7)必为等式),最后得

$$q^\circ = \frac{a-c}{b} > \frac{a-c}{2b} = q^m;$$

$$p^\circ = c < \frac{a+c}{2} = p^m.$$

8.1.2 Bertrand 模型

如果某商品的市场不是由一个卖者,而是由少数几个互相竞争的卖者垄断,这些卖者称为寡头,那么寡头的定价行为典型地表现出策略互动的特性,因而在第六章中展开的对策论成为自然的分析工具.我们从最简单的双头垄断入手,首先考虑由 Bertrand (1883)提出的以下模型.

设 $j = 1, 2$ 是某一商品的仅有的生产厂商,其成本函数都为 cq, c 是正常数.市场需求函数仍如上段,且设 $x(c) > 0$. 假定厂商 1,2 同时一次性地出价 $p_1, p_2, p = (p_1, p_2) \gg 0$,则厂商 j 的销售量 $x_j(p)$ 为

$$x_j(p) = \begin{cases} x(p_j), & p_j < p_{-j}; \\ x(p_j)/2, & p_1 = p_2; \\ 0, & p_j > p_{-j}, \end{cases} \tag{8-10}$$

其中，p 的下标 $-j$ 表 j 的对手. 厂商 j 的利润函数为

$$\pi_j(p) = (p_j - c)x_j(p). \tag{8-11}$$

每个厂商在出价时都会力求实现尽可能大的利润，为此不能不理性地估计到对手的出价. 因此，这是一个 2 人对策问题[①]. 颇不寻常的是，能够证明如下结果.

定理 8.1 $p = (c,c)$ 是 Bertrand 模型的唯一(纯策略)Nash 均衡.

证 固定 $p_{-j} = c$，结合式(8-10)、(8-11) 有

$$\pi_j(p_j,c) = \begin{cases}(p_j - c)x(p_j) < 0, & p_j < c;\\ 0, & p_j \geqslant c.\end{cases}$$

这表明

$$\pi_j(c,c) = \max_{p_j>0} \pi_j(p_j,c) = 0 \quad (j = 1,2),$$

可见 (c,c) 是 Nash 均衡(参见定义 6.5).

唯一性的证明要稍难些. 下面设 $(\bar{p}_1,\bar{p}_2)$ 是 Nash 均衡，要证 $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = c$. 不妨设 $\bar{p}_1 \leqslant \bar{p}_2$，分三种情况考虑.

1° 若 $\bar{p}_1 < c$，则由式(8-11) 有 $\pi_1(\bar{p}_1,\bar{p}_2) < 0$，而 $\pi_1(c,\bar{p}_2) = 0$，这与

$$\pi_1(\bar{p}_1,\bar{p}_2) = \max_{p_1>0} \pi_1(p_1,\bar{p}_2)$$

相矛盾. 因此 $c \leqslant \bar{p}_1 \leqslant \bar{p}_2$.

2° 若 $\bar{p}_1 > c$，取 $p_2 \approx \bar{p}_1$，使得 $c < p_2 < \bar{p}_1$，则

$$\begin{aligned}\pi_2(\bar{p}_1,p_2) &= (p_2 - c)x(p_2) && \text{(用式(8-11)、(8-10))}\\ &> \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - c)x(\bar{p}_1) && \text{(用 } p_2 \approx \bar{p}_1\text{)}\\ &\geqslant (\bar{p}_2 - c)x_2(\bar{p}_1,\bar{p}_2) && \text{(用式(8-10))}\\ &= \pi_2(\bar{p}_1,\bar{p}_2), && \text{(用式(8-11))}\end{aligned}$$

---

① 因每人的出价有无限多种选择，故这不是一个有限对策问题. 不过，6.2 节中的概念经明显的推广之后仍可应用.

但这与 $(\bar{p}_1,\bar{p}_2)$ 为 Nash 均衡相矛盾. 因此 $c=\bar{p}_1\leqslant\bar{p}_2$.

3° 若 $\bar{p}_2>c$，则当 $c<p_1<\bar{p}_2$ 时

$$\pi_1(p_1,\bar{p}_2)>0=\pi_1(\bar{p}_1,\bar{p}_2),$$

又得矛盾. 故只能有 $\bar{p}_2=c=\bar{p}_1$. □

值得注意的是，若取 c 为均衡价格，则厂商 1,2 都实现利润最大化. 因此 $p^\circ=c$ 与 $q^\circ=x(c)$（已假定 $x(c)>0$）组成完全竞争均衡. 这就得出结论：Bertrand 模型的 Nash 均衡与完全竞争均衡一致. 这一结论可推广于多个寡头的 Bertrand 模型.

8.1.3 Cournot 模型

由 Cournot(1838)最先提出的模型与 Bertrand 模型的不同之处是，厂商 j 不是选择价格 p_j，而是选择产量 q_j. 在某些情况下这是更现实的. 例如在谷物市场上，农场主在播种季节就要做出生产多少的决策，而价格则只有到收获之后才能完全确定.

保持 8.1.2 小节中对需求函数与成本函数的假设，令 $p(q)=x^{-1}(q)$. 与式(8-11)不同，现在厂商 j 的利润为

$$\pi_j(q_1,q_2)=[p(q)-c]q_j,\quad q=q_1+q_2. \tag{8-12}$$

这就归于考虑以式(8-12)为收益函数的 2 人对策问题. 下面的结论与定理 8.1 颇不相同.

定理 8.2 若 (q_1^*,q_2^*) 是 Cournot 模型的 Nash 均衡，则

$$c<p^*=p(q^*)<p^m, \tag{8-13}$$

其中，$q^*=q_1^*+q_2^*$，p^m 是完全垄断下的垄断价格.

证 因 q_j^* 是厂商 j 的利润最大化问题

$$\max_{q_j\geqslant 0}\ [p(q_j+q_{-j}^*)q_j-cq_j]$$

的解，故它满足一阶条件

$$p^*+p'(q^*)q_j^*\leqslant c,\quad \text{当 } q_j^*>0 \text{ 时等式成立},$$

其中 $q^*=q_1^*+q_2^*$，$p^*=p(q^*)$. 由 $x(c)>0$ 推出 $q_j^*>0$，于是

$$p^*+p'(q^*)q_j^*=c,\quad q_1^*=q_2^*, \tag{8-14}$$

由此立得 $c < p^*$. 余下只要证 $p^* < p^m$,这等价于 $q^* > q^m$. 由式(8-7),当 $q^m > 0$ 时有

$$p^m + p'(q^m)q^m = c, \quad p^m = p(q^m).$$

这与式(8-14)比较看出必定 $q^m \neq q^*$. 下面设 $q^m > q^*$,然后引出矛盾. 因 $p^m q^m - cq^m$ 是最大垄断利润,故

$$(p^m - c)q^m \geqslant (p^* - c)q^*. \tag{8-15}$$

令 $q_1 = q^m - q_1^*$,则 $q_1 > q_1^* > 0, q_1 + q_2^* = q^m$,

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1, q_2^*) &= (p^m - c)(q^m - q_1^*) && \text{(用式(8-12))} \\
&\geqslant (p^* - c)q^* - (p^m - c)q_1^* && \text{(用式(8-15))} \\
&> (p^* - c)q_1^* && \text{(用 } p^m < p^*\text{)} \\
&= \pi_1(q_1^*, q_2^*). && \text{(用式(8-12))}
\end{aligned}$$

这与 $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max\limits_{q_1 \geqslant 0} \pi_1(q_1, q_2^*)$ 相矛盾. □

如同在8.1.2小节中一样,直接看出 c 是完全竞争条件下的均衡价格. 因此定理8.2表明,Cournot 模型的 Nash 均衡价格 p^* 介于完全竞争价格 c 与完全垄断价格 p^m 之间,这是比 Bertrand 模型更合理的结论.

例 8.2 继续考虑例8.1. 以 $p^* = a - bq^*, p'(\cdot) = -b$ 代入式(8-14),然后解出

$$q_1^* = q_2^* = \frac{q^*}{2} = \frac{a - c}{3b};$$

$$p^* = a - bq^* = \frac{a + 2c}{3}.$$

这就验证了

$$c < p^* < p^m = \frac{a + c}{2}.$$

8.1.4 重复 Bertrand 模型

以上两个模型都假定两个寡头仅较量一次,谁也不必耽心对手的反击,这显然不很现实. 对手间的反复较量在寡头竞争市场上

极为常见，对于这种情形的分析，动态对策是一个自然的工具．下面给出一个最简单的例子，即重复 Bertrand 模型，它自然地表为一个重复对策．

设厂商 $j=1,2$ 在每期 $t(=1,2,\cdots)$ 依Bertrand模型互相竞争，第 t 期的出价与利润分别为 p_{jt} 与 $\pi_{jt}(p_t)$，$p_t=(p_{1t},p_{2t})$；总利润为

$$\pi_j=\sum_t \delta^{t-1}\pi_{jt}(p_t), \tag{8-16}$$

其中 $\delta\in(0,1)$ 为折现因子．厂商决策的目标是最大化总利润，厂商的每次选择是对手选择的某种回应：报复或者合作，似乎结局很不确定．实际上，厂商的选择服从于一些很强的规则．

首先指出一个较简单的情况：若重复对策只进行有限步，则惟一的 SPNE 是厂商每次出价为 c．这一结论可借助于反向归约程序与定理 8.1 归纳地证明(参见 6.3.1 小节)．

颇令人惊异的是，对于无限重复的 Bertrand 模型，情况发生了微妙的变化．固定 $p\geqslant c$，考虑策略

$$p_{jt}=\begin{cases}p, & t=1 \text{ 或 } p_\tau=(p,p)\quad(\forall\,\tau<t);\\ c, & \text{否则}.\end{cases} \tag{8-17}$$

也就是说，每个厂商都从出价 p 开始，只要没人破坏，就一直维持下去；一旦有人降价，则招致报复，此后均出价 c．如上的策略称为从 p 开始的Nash复归策略．取 $p=p^m$ 或 c，得到Nash复归策略的两种极端情况．Nash 复归策略是否为 SPNE，与 δ 的大小有关．直观上，若 $\delta\to 0$，则式(8-16)中 t 充分大的那些 π_{jt} 不太起作用，因而模型接近于有限次重复对策，似乎只有恒出价 c 的策略为 SPNE；当 δ 较大时可能存在其他的 SPNE．这些猜测由以下定理证实．

定理 8.3 对于无限重复 Bertrand 模型以下结论成立：

1° 从 p^m 开始的 Nash 复归策略是 SPNE$\Leftrightarrow\delta\geqslant 1/2$．

2° 若 $\delta\geqslant 1/2$，$p\in[c,p^m]$，则从 p 开始的 Nash 复归策略是 SPNE．

3° 若 $\delta<1/2$，则恒出价 c 的策略是惟一的 SPNE．

证 只证 1°,其余是类似的.约定以 s^m 记从 p^m 开始的 Nash 复归策略,以 Γ_t 记从 t 期开始的子对策.因所有子对策具有同样的结构,故只需证 s^m 在每个 Γ_t 中导出 Nash 均衡 $\Leftrightarrow \delta \geqslant 1/2$.固定 $t \geqslant 1$.在 t 期之前出现过降价行为的情况是明显的,不予考虑.今设厂商 j 拟于 τ 期降价,$\tau \geqslant t$.今分两种情况计算 j 从 τ 期开始的总利润 π 与 π'.对于 π,双方均依策略 s^m,因而恒出价 p^m,于是

$$\pi = \sum_{r=\tau}^{\infty} \delta^{r-1} \cdot (p^m - c) \cdot \frac{1}{2} x(p^m)$$

(用式(8-16)、(8-10)、(8-11))

$$= \frac{1}{2(1-\delta)} \delta^{\tau-1} (p^m - c) x(p^m). \tag{8-18}$$

对于 π',j 的对手仍循策略 s^m,即在 τ 期出价 p^m,从 $\tau+1$ 期起出价 c;j 在 τ 期出价 $p < p^m$,此后出价不作限定.于是 $\pi_{jr} \leqslant 0(\forall\ r > \tau$,用定理 8.1),

$$\pi' \leqslant \delta^{\tau-1} (p - c) x(p), \tag{8-19}$$

注意上式右端可以达到(只要取 $p_{jr} = c, r > \tau$).注意到

$$\frac{1}{2(1-\delta)} \geqslant 1 \Leftrightarrow \delta \geqslant \frac{1}{2},$$

$$(p - c)x(p) \leqslant (p^m - c)x(p^m)$$

(参见 8.1.1 小节),故当 $\delta \geqslant 1/2$ 时

$$\pi' \leqslant \delta^{\tau-1}(p^m - c)x(p^m)$$

$$\leqslant \frac{\delta^{\tau-1}}{2(1-\delta)}(p^m - c)x(p^m) = \pi,$$

这表明 s^m 在 Γ_t 中导出 Nash 均衡.若 $\delta < 1/2$,令 $p \approx p^m$,且式(8-19)取等号,则由式(8-18)、(8-19)可得 $\pi' > \pi$,因而 s^m 在 Γ_t 上不导出 Nash 均衡. □

8.2 非对称信息

在一个商品市场上,交易者对于所交易的商品具有不对称的

信息，是非常普遍的现象. 最常见的例子有：

(1) 在劳务市场上，雇主不充分了解求职者的能力；

(2) 在旧货市场上，顾客不充分了解旧货的质量；

(3) 在证券市场上，投资者不充分了解证券的风险.

以上例子以劳务市场最为典型. 下面的分析主要就劳务市场的情况展开，所用的方法与结论适当改造后即可用于其他市场.

不同能力的员工所提供的劳务本应当做不同的商品，因而具有不同的价格. 但不识货的雇主将其混为一体了，这就破坏了均衡理论的条件，如此所得的均衡将不再有完全市场条件下竞争均衡的性质，特别，不再是 Pareto 最优的.

8.2.1 逆选择

设同等的厂商 $j=1,2,\cdots,J$ 生产同一产品(可理解为复合产品)，其市场价格与 j 无关，因而可标准化为 1. 设 j 以劳务为惟一投入，且具有常数规模收益，这意味着生产函数为线性函数(参见 3.1.2 小节). 进入市场待雇的工人总数为 N，各人的生产能力介于 $\underline{\theta}$ 与 $\overline{\theta}$ 之间，其分布函数为 $F(\cdot)$. 生产能力为 θ 的工人(为简便起见，简称为 θ 型工人)被雇用后在单位时间内的生产量为 θ，不被雇用的工人在家开业(或从事其他工作)获利 $r(\theta)$(它是被雇的机会成本). 假定厂商是风险中性的，他们通过适当选择工资 $w(\theta)$ 来最大化期望利润 $E[\theta-w(\theta)\,|\,r(\theta)\leqslant w(\theta)]$. 注意工资 $w(\theta)$ 正是购买 θ 型工人劳务的价格. 基本的课题是，确定在某种均衡状态下的均衡工资 $w^*(\theta)$ 与被雇工人的均衡等级 $\Theta^*=\{\theta : r(\theta)\leqslant w^*(\theta)\}$. 依信息对称与否，以上问题的解答截然不同.

1. 信息对称情况

若雇主对工人能力具有完全的信息，则对每个 $\theta\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]$，$\theta$ 型工人构成单独的市场，在竞争均衡状态下，厂商雇用 θ 型工人获得零利润，付给 θ 型工人的工资必为 θ. 这就得到均衡问题的解为

$$w^*(\theta)=\theta,\quad \Theta^*=\{\theta : r(\theta)\leqslant\theta\}. \tag{8-20}$$

由第一基本福利定理，均衡结局式(8-20)是 Pareto 最优的.

2. 信息不对称情况

若雇主完全缺乏对工人能力的信息，则雇主选择的工资 w 与 θ 无关. 若 $w < E[\theta | r(\theta) \leqslant w]$，则能力较高的工人会转向愿意支付较高工资的厂商，这种倾向将促使 w 提高；反之，若 $w > E[\theta | r(\theta) \leqslant w]$，则将有更多的工人希望被雇用，这将压低 w. 因此，均衡问题的解为

$$w^* = E[\theta | r(\theta) \leqslant w^*], \quad \Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leqslant w^*\}. \tag{8-21}$$

依据 Akerlof(1970)，称结局式(8-21)为竞争均衡，其中 w^* 称为竞争均衡工资. 直观上，式(8-21) 所表出的 w^* 是被雇工人的平均生产力. 若令

$$\varphi(w) = E[\theta | r(\theta) \leqslant w], \tag{8-22}$$

则 w^* 正是函数 $\varphi(\cdot)$ 的不动点. 因函数 $\varphi(\cdot)$ 的不动点不必是惟一的，故劳务市场的竞争均衡亦未必是惟一的.

竞争均衡未必是 Pareto 最优的. 这还不是信息不对称的最严重的后果. 由式(8-21)看出，一般来说，有某些 $\theta \in \Theta^*$ 使得 $\theta > w^*$. 这些能力较强的工人未必情愿在工资低于产出的条件下干下去，其中必有一些人毅然退出市场，从而使留下来的工人平均生产能力降低. 但雇主必须保持式(8-21) 中的等式，他除了降低工资 w^* 之外别无选择，但这又会引发新一轮的高水平工人出走. 如此恶性循环，致使式(8-21) 中 Θ^* 所含等级愈来愈低，而 w^* 则愈来愈低. 在极端情况下，可能仅留下能力最差的工人，导致该行业趋于完全解体. 以上描述的，就是信息经济学中所称的逆选择，它典型地表现了信息不对称市场的高度无效性.

考虑一个解释性例子.

例 8.3 设 $r(\theta) = \alpha\theta, \alpha \in (0, 1/2)$ 为常数，θ 在区间 $[0, b]$ 上均匀分布，$b > 0$. 对任给 $w \in [0, \alpha b]$，依式(8-22)，有

$$\varphi(w) = E[\theta | \alpha\theta \leqslant w] = w/2\alpha.$$

若 $w > \alpha b$，则 $\varphi(w) = \varphi(\alpha b) = b/2$. $\varphi(\cdot)$ 的图形如图 8-2 所示.

$\varphi(\cdot)$ 有两个不动点：$w_0^* = 0, w_1^* = b/2$，它们就是非对称信息条件下的两个竞争均衡工资. 相应地有

$$\Theta_0^* = \{0\}; \quad \Theta_1^* = [0,b].$$

这表明当雇主选择工资 w_0^* 时，只有最差的工人愿意受雇白干；而当雇主选择工资 w_1^* 时，所有的工人都被雇用.

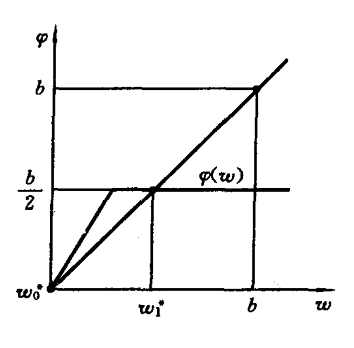


图 8-2

无论雇主选择工资 w_0^* 或 w_1^*，都会促使高水平工人退出该市场. 不妨设工人出走先后严格依据水平从高到低的顺序，那么一些工人退出后，b 将下降. 而这又使得依赖于 b 的 w_1^* 相应地下降. 这一过程一直进行下去，若 $b \to 0$，则市场趋于完全解体.

8.2.2 信号显示

信号显示概念是 Spence 于 1973 年首先提出的，其基本思想是：高水平的工人有可能选择一定的行为，用以显示出与低水平工人的区别. 例如，工人可以通过接受测试，或完成一定水平的教育等来显示自己的能力. 类似的信号显示行为亦广泛存在于其他信息不对称市场中. 下面仅就简单的情况建立数学模型并分析其均衡解.

以 $e \in \mathbf{R}_+$ 表示教育水平，工人选择某一水平 e 的教育纯粹为了显示自己的能力，教育并不改变工人所属的类型 θ. 以 $c(e,\theta)$ 记 θ 型工人接受教育水平 e 的成本，假定函数 $c(\cdot,\cdot) \in C^2$ 且满足条件

$$\begin{cases} c(0,\theta) = 0, \quad c_e(e,\theta) > 0, \quad c_{ee}(e,\theta) > 0, \\ c_\theta(e,\theta) < 0, \quad c_{e\theta}(e,\theta) < 0, \end{cases} \tag{8-23}$$

其中，$e > 0$，下标记偏导数. 假定 θ 型工人的效用为

$$u(w,e|\theta) = w - c(e,\theta). \tag{8-24}$$

假定所考虑的劳务市场中仅有两类工人：θ_H 与 θ_L，且 $\theta_H > \theta_L > 0$，其出现的概率分别为 λ 与 $\lambda' = 1 - \lambda, 0 < \lambda < 1$；设 $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$. 在这个市场中，工人选择教育水平 e，并依据厂商提出的工资决定是否接受雇用；厂商依据工人所接受的教育 e（这个信息用来估计工人的类型）决定工资. 这显然是一个策略互动的过程，因而适于用一个动态对策模型来分析. 图 8-3 给出了这一对策的对策树. 当然对策树不可能完全画出来，因为 e 与 w 都可选为任何非负实数.

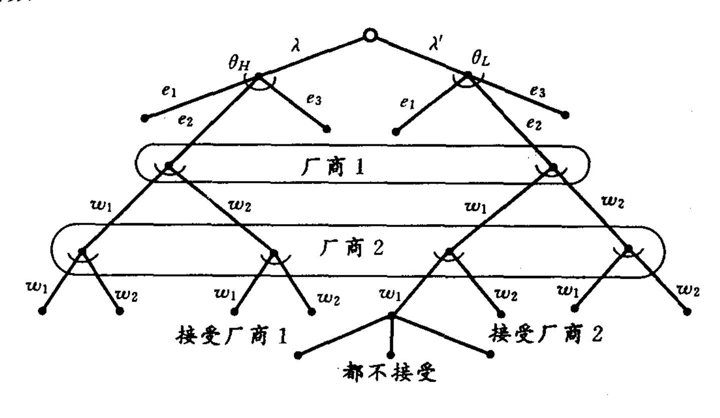


图 8-3

关于上述对策的课题是，确定某种均衡策略，依此均衡策略，θ 型工人选择均衡的教育水平 $e^*(\theta)$，厂商则对接受教育 e 的工人提出均衡工资 $w^*(e)$；在均衡策略下，工人与厂商都在一定意义上达到自己的最优选择. 问题在于，应如何确切地描述我们所需要的均衡呢？下面是一个类似于定义 6.7 的定义.

定义 8.1 上述劳务市场对策的一个（纯）策略组合称为完备 Bayes 均衡（PBE），若存在置信函数 $\mu(\cdot): \mathbf{R}_+ \to [0,1]$，使得以下条件满足：

1° 在所给厂商策略下，工人的策略最大化其效用.

2° $\mu(e)$ 通过 Bayes 规则从工人的策略导出.

3° 若 $\mu(e)$ 恰为选择教育 e 的工人属于类型 θ_H 的概率，则厂商的策略构成厂商对策的 Nash 均衡.

实际上，定义 8.1 中的 $\mu(e)$ 就是厂商对接受教育 e 的工人属于 θ_H 的信用度.

可能存在多个很不相同的 PBE，作出完全的描述并不简单.下面仅给出某些定性的结论，这些结论取决于所描述的对策结构与条件(8-23). 以下 $w^*(e)$ 与 $e^*(\theta)$ 分别记由某个 PBE 决定的均衡工资与均衡教育水平，函数 $\mu(\cdot)$ 依定义 8.1 $e^*(\theta)$ 只取两个值：$e^*(\theta_H)$ 与 $e^*(\theta_L)$. 依 $e^*(\theta_H) = e^*(\theta_L)$ 成立与否，所给的 PBE 分别称为分离均衡与合并均衡，两者有明显的区别，下面只考虑前者.

命题 8.1 对于分离的均衡有

$$w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L, \quad w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H, \quad e^*(\theta_L) = 0. \tag{8-25}$$

证 在均衡策略下，$\mu(e)$ 是选择教育 e 的工人属于 θ_H 的概率，厂商的期望利润为零，因此

$$w^*(e) = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L. \tag{8-26}$$

以 $\mu(e^*(\theta_H)) = 1$ 代入式(8-26) 得 $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$; 同理 $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$. 其次，设 $e^*(\theta_L) = \hat{e} > 0$，则用已证的结论得

$$\theta_L = w^*(e^*(\theta_L)) = w^*(\hat{e}).$$

另一方面，由式(8-26) 有 $w^*(0) \geqslant \theta_L$，这推出

$$\begin{aligned} u(w^*(0),0|\theta_L) &= w^*(0) - c(0,\theta_L) && \text{(用式(8-24))} \\ &> \theta_L - c(\hat{e},\theta_L) && \text{(用式(8-23))} \\ &= w^*(\hat{e}) - c(\hat{e},\theta_L) \\ &= u(w^*(\hat{e}),\hat{e}|\theta_L), \end{aligned}$$

这与 θ_L 型工人选择 $\hat{e}$ 实现最大效用相矛盾. 因此 $e^*(\theta_L) = 0$. 这就证得式(8-25) 成立. □

现在给出某些几何描述. 由式(8-25) 有 $e^*(\theta_L) = 0$，即低水平

工人的均衡选择是不接受教育.约定 $\tilde{e}=e^*(\theta_H)$,因所考虑的是分离均衡,故 $\tilde{e}>0$.结合式(8-25)、(8-26)得出

$$w^*(0)=\theta_L,\quad w^*(\tilde{e})=\theta_H,\quad \theta_L\leqslant w^*(e)\leqslant\theta_H\quad(\forall\, e\geqslant 0).$$

曲线 $w=w^*(e)$ 如图 8-4 所示.由定义 8.1 中条件 1°,有

$$u(w^*(e^*(\theta_L)),e^*(\theta_L)|\theta_L)\geqslant u(w^*(\tilde{e}),\tilde{e}|\theta_L),$$

$$u(w^*(e^*(\theta_H)),e^*(\theta_H)|\theta_H)\geqslant u(w^*(0),0).$$

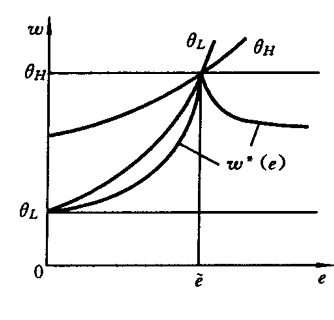


图 8-4

这得出 $u(\theta_L,0)=u(\theta_H,\tilde{e}|\theta_L)$,即点 $(\theta_L,0)$ 与 $(\theta_H,\tilde{e})$ 在 θ_L 型工人的同一无差别曲线上(在图 8-4 中记作 θ_L).由条件(8-23)推出,在点 $(\theta_H,\tilde{e})$ 相交的无差别曲线 θ_L 与 θ_H 都是上升的凸曲线,以 $(\theta_H,\tilde{e})$ 为惟一交点,且其相对位置有如图 8-4 所示.

如果我们将信号显示的情况与 8.2.1 小节中的结果作一比较,就会发现一个有趣的事实:寻求信号显示未必给工人带来好处.在没有信号显示机会的情况下,依式(8-21)有 $w^*=E[\theta]=\lambda\theta_H+\lambda'\theta_L$.另一方面,在有信号显示机会的情况下,$\theta_L$ 型工人选择不接受教育($e^*(\theta_L)=0$!),因而其效用为 θ_L,θ_L 严格地低于 $E[\theta]$,即 θ_L 型工人的境况严格地差于没有信号显示的情况.至于 θ_H 型工人,由于他选择的教育 $\tilde{e}=e^*(\theta_H)$ 使得厂商完全相信他的能力,他获得了高于 $E[\theta]$ 的工资:$w^*(\tilde{e})=\theta_H>E[\theta]$.即使如此,他的情况亦未必比没有信号显示时好,因为他的效用

$$u=w^*(\tilde{e})-c(\tilde{e},\theta_H)=\theta_H-c(\tilde{e},\theta_H)$$

完全可能低于 $E[\theta]$.例如当 $\lambda\approx 1$,即 θ_L 型工人甚少时,必然有 $\theta_H-c(\tilde{e},\theta_H)<E[\theta]$.在这种情况下,$\theta_H$ 型工人选择接受教育仅仅是为了不至于被厂商将自己划入少数低能者之内.

8.2.3 信息甄别

在信号显示模型中，区分能力的行为主体是工人.现在取另一条思路：厂商采取某种行动来甄别工人的类型.

仍然保持 8.2.2 小节中记号 $\theta_H,\theta_L,\lambda$ 的意义，且假定 $r(\theta_L)=r(\theta_H)=0$.不同的是，现在设厂商对工人提出形如 (w,t) 的合同，其中 w 表工资，$t\geqslant 0$ 表任务水平.t 并不改变工人的生产力，它只是降低了工人的效用(对照式(8-24)).设

$$u(w,t|\theta)=w-c(t,\theta), \tag{8-27}$$

其中函数 $c(\cdot,\cdot)$ 满足条件(8-23).实际上，t 完全起前面讨论的教育 e 的作用，即用来区分工人的能力.假定市场运作规则如下：厂商 1,2 同时宣布(任意有限多个)合同，然后工人决定接受哪个合同.假定当效用相同时工人偏向于接受任务水平较低的合同；若被工人看中的合同被两个厂商同时提出，则每个厂商有 1/2 的概率被接受.对于这个动态对策模型，我们的任务是确定它的 SPNE(参见 6.3.1 小节).

为行文简便起见，若在某个 SPNE 下 θ_i 型工人接受合同 (w_i,t_i)，$i=H,L$，则称 (w_i,t_i) 为均衡合同.以下设 $(w_i,t_i)(i=H,L)$ 是给定的均衡合同，我们要在不同条件下确定 $w_i,t_i(i=H,L)$.依厂商对工人能力是否有完全信息，上述问题有不同的解答.完全信息的情况比较简单.

命题 8.2 若厂商有关于工人能力的完全信息，则 $(w_i,t_i)=(\theta_i,0)(i=H,L)$，因而厂商都得到零利润.

证 因厂商有关于工人能力的完全信息，厂商的合同是分别针对每类工人提出的，因而可分别对 $i=H,L$ 考虑.

1° 证 $w_i=\theta_i$.考虑厂商 1,2 同时提出合同的子对策.不妨设厂商 1 提出合同 (w_i,t_i)，而 $w_i>\theta_i$，则厂商 1 不提出任何合同更有利，与 (w_i,t_i) 是均衡合同相矛盾.若 $w_i<\theta_i$，以 π 记厂商 1,2 从雇用 θ_i 型工人获得的总利润，不妨设厂商 1 所获利润 $\leqslant\pi/2$.取充分

小的$\epsilon > 0$，厂商1提出合同$(w_i+\epsilon, t_i)$将吸引所有θ_i型工人，且得到接近于π的利润.但厂商1的利润不能增加，故必$\pi = 0$，$w_i > \theta_i$为不可能.因此$w_i = \theta_i$.

2° 证$t_i = 0$.在均衡合同下，θ_i型工人最大化其效用

$$u(w_i, t_i | \theta_i) = \max_{t \geqslant 0}[\theta_i - c(t, \theta_i)],$$

这推出$t_i = 0$. □

由此可见，在信息完全的情况下，厂商依据工人能力支付工资，而工人不接受任何要付出额外代价的合同.

定理 8.4 若厂商没有关于工人能力的信息，则$w_i = \theta_i (i = H, L)$，$t_L = 0$，$t_H$决定于等式

$$\theta_H - c(t_H, \theta_L) = \theta_L. \tag{8-28}$$

证 1° 证每个厂商依均衡合同的利润为零，其方法类似于命题8.2之证，从略.

下面的证明较多地借助于几何观察.在图8-5～图8-8中，θ_i曲线都表示θ_i型工人的无差别曲线.由条件(8-23)，θ_i曲线都是上升的凸曲线；这些曲线左上方的合同(w, t)对于θ_i型工人有更高的效用.以下约定厂商1提出合同(w_L, t_L).

2° 证$(w_L, t_L) \neq (w_H, t_H)$.若$(w_L, t_L) = (w_H, t_H)$，则结合1°的结论有$w_L = E[\theta]$.设厂商2提出如图8-5所示的合同$(w, t)$，则必吸引所有$\theta_H$型工人而排除所有$\theta_L$型工人，$w < \theta_H$，因而厂商2得到正利润，得出矛盾.

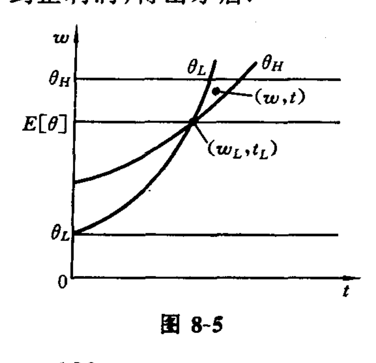


图 8-5

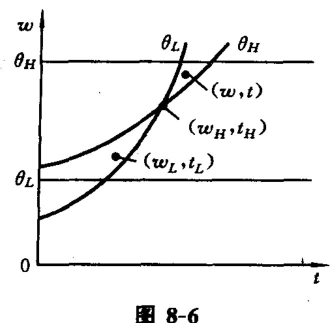


图 8-6

3° 证 $w_i = \theta_i(i = H,L)$. 若 $w_L < \theta_L$,取 w 使 $w_L < w < \theta_L$,则任何厂商提出合同 (w,t_L) 都将得到正利润,得出矛盾. 因此 $w_L \geqslant \theta_L$. 若 $w_H < \theta_H$,则 (w_L,t_L) 与 (w_H,t_H) 的位置关系应如图 8-6 所示. 若厂商 2 提出如图 8-6 所示的合同 (w,t),则必吸引所有 θ_H 型工人,排除所有 θ_L 型工人,因而得到正利润,得出矛盾. 因此 $w_H \geqslant \theta_H$. 考虑到总的均衡利润为零,故由所得的两不等式推出 $w_i = \theta_i(i = H,L)$.

4° 证 $t_L = 0$. 若 $t_L > 0$,厂商 2 提出如图 8-7 所示的合同 (w,t),则必吸引所有 θ_L 型工人而排除所有 θ_H 型工人,$w < \theta_L$,因而得到正利润,得出矛盾.

5° 证等式(8-28). 因 $c(0,\theta_L) = 0$,$c(t,\theta_L)$ 对 t 严格增加且严格凸,故存在惟一的 $\hat{t} > 0$,使

$$c(\hat{t},\theta_L) = \theta_H - \theta_L.$$

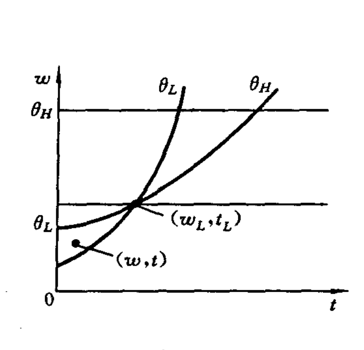


图 8-7

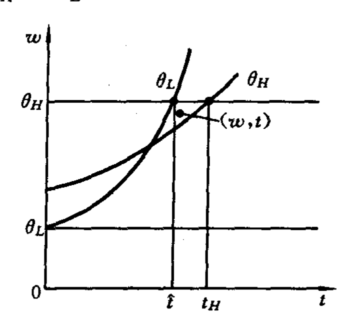


图 8-8

只要证 $\hat{t} = t_H$. 由

$$\begin{aligned} \theta_H - c(\hat{t},\theta_L) &= \theta_L \\ &= u(w_L,t_L|\theta_L) \qquad (\text{用式(8-27)}) \\ &\geqslant u(w_H,t_H|\theta_L) \\ &= \theta_H - c(t_H,\theta_L) \end{aligned}$$

得出 $c(\hat{t},\theta_L) \leqslant c(t_H,\theta_L)$,从而 $\hat{t} \leqslant t_H$. 若 $\hat{t} < t_H$,厂商 2 提出如图

8-8 所示的合同(w,t) 将吸引所有 θ_H 型工人而排除所有 θ_L 型工人，因而获得正利润，得出矛盾. 故 $\hat{t} = t_H$. □

注意，命题 8.2 与定理 8.4 结论的惟一差别是关于 t_H 的：对于前者 $t_H = 0$；对于后者，t_H 取决于式(8-28). 式(8-28) 恰好表明点(θ_H, t_H) 与$(\theta_L, 0)$ 在同一 θ_L 曲线上.

8.3 委托人-代理人问题

交易者之间的信息不对称，既可以出现于合同制定之时，亦可能出现于合同签订之后. 后一种情况的典型例子是雇主与其雇用的管理者的关系，这就是被专门研究的委托人-代理人问题. 依据信息不对称表现为隐蔽行为与隐蔽信息，上述问题可描述为两个不同的模型，下面分别予以考虑.

8.3.1 隐蔽行为

设某一业主(委托人)要雇一位管理者(不妨称为经理)，作为他的代理人主管某一项目. 项目的利润 π 自然与经理的效力有关. 雇主为激励经理提高效力，在雇用合同中会明确规定联系 π 的工资 $w(\pi)$ 与经理的效力水平 e. 如果经理的行为尽在雇主的了解之中，那么合同的制定比较简单. 但若经理的行为是隐蔽的，合同的设计就比较复杂. 在这种情况下，雇主所选择的工资函数 $w(\cdot)$ 本身应具有一种激励作用，使得能促使经理自动选择雇主所希望的效力水平. 这当然牵涉到各种复杂因素，下面的模型只是高度简化的结果.

以下设利润 π 是取值于区间$[\underline{\pi}, \bar{\pi}]$上的随机变量，它在经理效力水平 e 之下的条件分布函数与条件概率密度函数分别为 $F(\pi|e)$ 与 $f(\pi|e)$，假定 $f(\cdot\ |e) > 0$. 经理的 Bernoulli 效用函数为(参见 5.1.2 小节)

$$u(w,e) = v(w) - g(e), \tag{8-29}$$

w 记经理所获工资；函数 $v(\cdot) \in C^2$ 且满足条件

$$v'(\cdot) > 0, \quad v''(\cdot) \leqslant 0; \tag{8-30}$$

$g(\cdot)$ 是严格增加的. 条件 $v''(\cdot) \leqslant 0$ 意味着经理是风险厌恶者（参见 5.2.1 小节）. 下面限于考虑经理仅有两种效力水平 e_H, e_L 的情况，设 $e_H > e_L$，令 $E = \{e_H, e_L\}$. 假定利润分布满足

$$F(\pi|e_H) \leqslant F(\pi|e_L); \tag{8-31}$$

$$\int \pi f(\pi|e_H)\mathrm{d}\pi > \int \pi f(\pi|e_L)\mathrm{d}\pi. \tag{8-32}$$

以 $(w(\cdot), e)$ 记一个合同，这意味着雇主对经理支付工资 $w(\pi)$，而经理被要求实现效力水平 e. 假定雇主是风险中性者，因而仅当他能获得最大期望利润时愿意提出合同 $(w(\cdot), e)$；而经理则只有在期望效用不低于某个最小值 $\bar{u}$ 时才肯接受合同.

关于以上模型的基本问题是，为雇主设计一个最优合同，使得它满足一定的最优性条件且能被经理所接受. 如同在上节中所见，这类问题的解答与雇主所获信息完全与否有关.

命题 8.3 设雇主对经理的效力水平有完全信息，则最优合同 $(w^*(\cdot), e^*)$ 由以下条件确定：$w^*(\cdot) \equiv w^*$，

$$w^* = v^{-1}(\bar{u} + g(e^*)); \tag{8-33}$$

$$\begin{aligned} &\int \pi f(\pi|e^*)\mathrm{d}\pi - w^* \\ &\geqslant \int \pi f(\pi|e)\mathrm{d}\pi - v^{-1}(\bar{u} + g(e)), \quad e \in E. \end{aligned} \tag{8-34}$$

证 业主选择 $w(\cdot)$ 的原则，是在经理期望效用 $\geqslant \bar{u}$ 的条件下最大化自己的期望利润，这意味着解最大化问题

$$\begin{cases} \max\limits_{e \in E, w(\cdot)} \int [\pi - w(\pi)] f(\pi|e)\mathrm{d}\pi, \\ \text{s.t.} \ \int v(w(\pi)) f(\pi|e)\mathrm{d}\pi - g(e) \geqslant \bar{u}, \quad e \in E. \end{cases} \tag{8-35}$$

为解问题(8-35)，首先固定 $e \in E$，解关于 $w(\cdot)$ 的最小化问题

$$\begin{cases} \min\limits_{w(\cdot)} \int w(\pi)f(\pi|e)\mathrm{d}\pi, & (8\text{-}36) \\ \text{s.t.} \int v(w(\pi))f(\pi|e)\mathrm{d}\pi - g(e) \geqslant \bar{u}. & (8\text{-}37) \end{cases}$$

由 K-T 条件，存在乘子 $\gamma \geqslant 0$，使得

$$f(\pi|e) - \gamma v'(w(\pi))f(\pi|e) = 0.$$

因已设 $f(\cdot|e) > 0$，故由上式得出 $\gamma > 0$，

$$v'(w(\pi)) = 1/\gamma, \quad w(\pi) \equiv w_e^* = \text{const}.$$

$w(\pi) = w_e^*$ 应使式(8-37) 为等式，因而得

$$v(w_e^*) = \bar{u} + g(e), \quad \text{即 } w_e^* = v^{-1}(\bar{u} + g(e)).$$

将所得结论与式(8-33) ～ (8-35) 比较看出，$(w^*(\cdot), e^*)$ 是问题 (8-35) 的解当且仅当 $w^*(\cdot) \equiv w_e^* \triangleq w^*, e = e^*, w^*$ 与 e^* 满足式(8-33)、(8-34). □

值得注意的是，在信息完全的情况下，经理所得到的工资是固定的，因而他不必承担任何风险.

如果雇主没有关于经理效力水平的信息，则他在依据最小化问题(8-36)、(8-37) 确定工资 $w(\cdot)$ 时，并不确知经理是否效力为 e，因而他需要补充一个约束条件：选择效力水平 e 能最大化经理的期望效用. 因此，雇主的最优合同决定于最小化问题

$$\begin{cases} \min\limits_{w(\cdot)} \int w(\pi)f(\pi|e)d\pi, \\ s.t. \int v(w(\pi))f(\pi|e)d\pi - g(e) \geqslant \bar{u}, \\ \quad \int v(w(\pi))f(\pi|e)d\pi - g(e) \\ \quad \geqslant \int v(w(\pi))f(\pi|e')d\pi - g(e'), \quad \forall e' \in E. \end{cases} \qquad (8\text{-}38)$$

定理 8.5 设雇主没有关于经理效力水平的信息，w^*, e^* 依命题 8.3，则设计最优合同$(\bar{w}(\cdot), \bar{e})$ 的方法如下：

1° 若 $v(w) \equiv w$ (这意味着经理是风险中性的)，则取

$$\overline{w}(\pi) = \pi - \int \pi f(\pi | e^*) \mathrm{d}\pi + \overline{u} + g(e^*), \quad \bar{e} = e^*. \tag{8-39}$$

2° 若 $v''(\cdot) < 0, \bar{e} = e_L$,则取 $\overline{w}(\pi) = v^{-1}(\overline{u} + g(e_L))$.

3° 若 $v''(\cdot) < 0, (\overline{w}(\cdot), e_H)$ 是最优合同,则存在 $\gamma, \mu > 0$,使得成立(所谓 Mirrless-Holmstrom 条件)

$$\frac{1}{v'(\overline{w}(\pi))} = \gamma + \mu\left[1 - \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)}\right]. \tag{8-40}$$

此时雇主支付的期望工资 $> w^*$.

证 1° 设 $\overline{w}(\cdot)$ 与 $\bar{e}$ 表为式(8-39),则利用 e^* 的含义易直接验证 $\overline{w}(\cdot)$ 与 $\bar{e}$ 满足约束条件(8-37)、(8-38),且

$$\int \overline{w}(\pi) f(\pi | \bar{e}) \mathrm{d}\pi = \overline{u} + g(e^*) = v(w^*) = w^*. \quad (\text{用式(8-33)})$$

这表明在合同$(\overline{w}(\cdot), \bar{e})$下雇主的期望利润与完全信息的情况相同,而雇主不能指望有更好的结局,因此$(\overline{w}(\cdot), \bar{e})$就是最优合同.

2° 如同 1° 一样,可验证 $\overline{w}(\cdot)$ 与 $\bar{e}$ 满足约束条件(8-37)、(8-38)(验证约束条件(8-38)时用到关键的不等式 $g(e_L) < g(e_H)$!).这同时也说明 $w^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e_L)), e^* = e_L$ 满足条件(8-33)、(8-34),因而(w^*, e^*)是完全信息情况下的最优合同.因此,如同与 1° 一样的理由,$(\overline{w}(\cdot), \bar{e})$是不完全信息情况下的最优合同.

3° 在 $e = e_H$ 的情况下,约束条件(8-38)可写成

$$\int v(w(\pi))[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)] \mathrm{d}\pi \geqslant g(e_H) - g(e_L). \tag{8-41}$$

如同证命题 8.3,将 Lagrange 乘子方法用于问题(8-36)~(8-38),得出乘子 $\gamma, \mu \geqslant 0$,使得该问题的解$(\overline{w}(\cdot), e_H)$满足

$$f(\pi|e_H) = \gamma v'(\overline{w}(\pi)) f(\pi|e_H) + \mu v'(\overline{w}(\pi))[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)],$$

这直接推出式(8-40).若 $\gamma = 0$,则由式(8-40)与 $v'(\cdot) > 0$ 推出

$$f(\pi|e_L) < f(\pi|e_H).$$

上式两边对 π 积分得 $1<1$!若 $\mu=0$,则由式(8-40) 推出 $\overline{w}(\pi)\equiv$ const,以它代入式(8-41) 中的 $w(\pi)$ 得出

$$0 \geqslant g(e_H) - g(e_L) > 0,$$

亦得矛盾.因此 $\gamma>0,\mu>0$.这又推出($\overline{w}(\cdot),e_H$) 使约束条件(8-37)、(8-38) 皆取等式,于是 $e^*=e_H$ 与 $w^*=v^{-1}(\overline{u}+g(e_H))$ 构成完全信息条件下的最优合成.其次,有

$$\begin{aligned}\overline{u}+g(e_H) &= \int v(\overline{w}(\pi))f(\pi|e_H)\mathrm{d}\pi \\ &< v\left(\int \overline{w}(\pi)f(\pi|e_H)\mathrm{d}\pi\right), \qquad (\text{用 } v''(\cdot)<0)\end{aligned}$$

这表明期望工资 $>w^*$. □

当 $v''(\cdot)<0$ 时,由定理 8.5 推出以下结论:若在信息完全的情况下最优合同为(w^*,e_L),则在经理行为隐蔽的情况下,(w^*,e_L) 仍为最优合同.若在信息完全的情况下最优合同为(w^*,e_H),则在经理行为隐蔽的情况下有两种可能,其一是以(w,e_L) 为最优合同,其中 $w=v^{-1}(\overline{u}+g(e_L))<w^*$;其二是以($\overline{w}(\cdot),e_H$) 为最优合同,此时经理的期望工资 $>w^*$.在这两种情况下,经理的期望效用都是 $\overline{u}$,而雇主都遭受一定福利损失.

8.3.2 隐蔽信息

继续讨论委托人-代理人问题,但对模型作一不同的设定:现在经理要隐蔽的不是他所选择的效力水平 e,而是在合同签订后随机地出现的某种状态 θ,该状态直接影响到经理的效用.例如,经理在效力水平 e 下履职时,可能商机叠至,经营顺利,亦可能相反.这些信息经理自然了然于胸,而雇主则未必知晓.

因现在我们主要感兴趣的是状态 θ 的作用,故与上段不同,简化利润 π 与效力水平 e 的关系,设 π 确定地与 e 相关,即 $\pi=\pi(e)$,函数 $\pi(\cdot)\in C^2$ 且满足条件

$$\pi(0)=0,\quad \pi'(\cdot)>0,\quad \pi''(\cdot)<0. \tag{8-42}$$

代替式(8-29),现在设经理的 Bernoulli 效用函数为

$$u(w,e,\theta)=v(w-g(e,\theta)), \tag{8-43}$$

其中,$v(\cdot)$ 满足条件(8-30),但设 $v''(\cdot)<0$. 函数 $g(\cdot,\cdot)$ 以货币计量,可认为它量度了经理履职时的困苦,$g(\cdot,\cdot)\in C^2$ 且满足条件

$$\begin{cases} g(0,\theta)=g_e(0,\theta)=g_{e\theta}(0,\theta)=0, \\ g_e(e,\theta)>0,\quad g_{e\theta}(e,\theta)<0(e>0), \\ g_\theta(e,\theta)<0,\quad g_{ee}(e,\theta)>0. \end{cases} \tag{8-44}$$

为简单起见,只考虑 θ 取两种状态 θ_H,θ_L 的情况,且设 $\theta_H>\theta_L$. 下面用到记号 θ_i,θ_j 时,总设 $i,j=H,L$ 且 $i\neq j$. 设状态 θ_i 出现的概率为 $\lambda_i>0,\lambda_H+\lambda_L=1$.

类似于隐蔽行为模型,说到合同 (w_i,e_i) 时意味着,当经理通报出现状态 θ_i 时,雇主支付工资 w_i,且要求经理实现效力水平 e_i. 如同隐蔽行为模型一样,基本的问题是确定某种最优合同,使得在一定约束条件下实现雇主的期望利润最大化. 这一问题的严格描述与解答,都与信息是否完全有关.

完全信息的情况比较简单:最优合同无非是在保证经理期望效用 $\geqslant\bar{u}$ 的条件下最大化雇主的期望收益,即解最大化问题(对照问题(8-35))

$$\begin{cases} \max\ \sum_i \lambda_i[\pi(e_i)-w_i], & (8\text{-}45) \\ \text{s.t.}\ \sum_i \lambda_i v(w_i-g(e_i,\theta_i))\geqslant\bar{u},\quad (w_i,e_i)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+. & (8\text{-}46) \end{cases}$$

命题 8.4 设雇主对状态 θ_i 有完全信息,$(w_i^*,e_i^*)(i=H,L)$ 为最优合同,则存在 $\gamma>0$,使得

$$\gamma v'(w_i^*-g(e_i^*,\theta_i))=1; \tag{8-47}$$

$$\pi'(e_i^*)=g_e(e_i^*,\theta_i); \tag{8-48}$$

$$e_H^*>e_L^*>0,\quad w_i^*-g(e_i^*,\theta_i)=v^{-1}(\bar{u}). \tag{8-49}$$

证 作 Lagrange 函数

$$\mathscr{L} = \sum_i \lambda_i[\pi(e_i) - w_i + \gamma v(w_i - g(e_i,\theta_i)) + \nu_i e_i],$$

其中，$\gamma,\nu_i \geqslant 0$ 是乘子. 依 K-T 条件，有

$$\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_i} = -1 + \gamma v'(w_i^* - g(e_i^*,\theta_i)) = 0; \qquad (8\text{-}50)$$

$$\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial e_i} = \pi'(e_i^*) - \gamma v'(\cdots)g_e(e_i^*,\theta_i) + \nu_i = 0; \qquad (8\text{-}51)$$

$$\gamma\Big[\sum_i \lambda_i v(\cdots) - \bar{u}\Big] = 0, \quad \nu_i e_i^* = 0. \qquad (8\text{-}52)$$

由式(8-50)直接推出式(8-47)，因而 $\gamma > 0$. 若 $e_i^* = 0$，则由式(8-51)有 $\pi'(0) + \nu_i = 0$，矛盾于条件(8-42). 因此 $e_i^* > 0$，从而 $\nu_i = 0$，这结合式(8-51)、(8-47)得出式(8-48). 由式(8-47)推出 $w_i^* - g(e_i^*,\theta_i)$ 与 $i = H,L$ 无关，这与 $\gamma > 0$ 及式(8-52)一起推出式(8-49)中的等式. 若 $e_L^* \geqslant e_H^*$，则

$$\pi'(e_L^*) \leqslant \pi'(e_H^*) = g_e(e_H^*,\theta_H) \qquad (\text{用式}(8\text{-}42)、(8\text{-}48))$$

$$< g_e(e_L^*,\theta_L) = \pi'(e_L^*), \qquad (\text{用式}(8\text{-}44)、(8\text{-}48))$$

得出矛盾. 因此 $e_H^* > e_L^* > 0$. □

下面转向不完全信息的情况. 首先面临的困难是如何准确界定最优合同. 问题在于，当雇主并不了解状态 θ_i 的出现时，他如何提出与状态相关的合同 (w_i,θ_i)？当然，雇主可以在合同中明确规定，经理有责任向雇主报告状态 θ_i 的出现. 然而，雇主凭什么能确信经理提供了真实信息？显然，在合同中规定"经理必须如实通报状态信息"是无济于事的. 如同对于隐蔽行为模型的处理一样，此处设计最优合同的巧妙之处在于：经理的诚实由合同所包含的利益机制自动保证. 其次，为了便于处理，还要求合同确保经理在任何状态下都至少得到最低效用，这一要求是比约束(8-46)更强的. 将以上考虑综合起来，就得出确定最优合同的最大化问题

$$\begin{cases} \max \sum_i \lambda_i[\pi(e_i) - w_i], \\ \text{s.t.}\ w_i - g(e_i,\theta_i) \geqslant v^{-1}(\bar{u}), & (8\text{-}53) \\ \quad w_i - g(e_i,\theta_i) \geqslant w_j - g(e_j,\theta_i). & (8\text{-}54) \end{cases}$$

条件(8-53)称为个人理性约束或保持效用约束,它表明经理是无限厌恶风险者;条件(8-54)称为激励相容性约束,它正体现了鼓励诚实通报信息的机制:若当状态 θ_i 出现时经理宣称出现 θ_j,则他将有较差的效用.

定理 8.6 设雇主没有关于状态 θ_i 的信息,$(\overline{w}_i,\bar{e}_i)(i=H,L)$ 是最优合同(即最大化问题(8-45)、(8-53)、(8-54)的解),(w_i^*,e_i^*) 是完全信息情况下的最优合同,则成立结论

$$\bar{e}_H = e_H^*,\quad \bar{e}_L < e_L^*; \tag{8-55}$$

$$\overline{w}_H > w_H^*,\quad \overline{w}_L < w_L^*; \tag{8-56}$$

$$\overline{w}_H - g(\bar{e}_H,\theta_H) > v^{-1}(\bar{u}) = \overline{w}_L - g(\bar{e}_L,\theta_L). \tag{8-57}$$

证 如同对命题 8.4 一样,用一个类似的 Lagrange 乘子论证,只是更繁琐些. 作 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \sum_i \lambda_i \{ & \pi(e_i) - w_i + \gamma_i[w_i - g(e_i,\theta_i)] + \nu_i e_i \\ & + \mu_i[w_i - g(e_i,\theta_i) - w_j + g(e_j,\theta_i)]\}, \end{aligned}$$

其中,$\gamma_i,\nu_i,\mu_i \geqslant 0$ 是乘子. 依 K-T 条件,有

$$\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w_i} = -1 + \gamma_i + \mu_i - \frac{\lambda_j\mu_j}{\lambda_i} = 0; \tag{8-58}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_i} = & \pi'(\bar{e}_i) - (\gamma_i + \mu_i)g_e(\bar{e}_i,\theta_i) + \nu_i \\ & + \frac{\lambda_j\mu_j}{\lambda_i}g_e(\bar{e}_i,\theta_j) = 0; \end{aligned} \tag{8-59}$$

$$\gamma_i[\overline{w}_i - g(\bar{e}_i,\theta_i) - v^{-1}(\bar{u})] = \nu_i\bar{e}_i = 0; \tag{8-60}$$

$$\mu_i[\overline{w}_i - g(\bar{e}_i,\theta_i) - \overline{w}_j + g(\bar{e}_j,\theta_i)] = 0. \tag{8-61}$$

由式(8-58),得

$$\gamma_i + \mu_i = 1 + \frac{\lambda_j \mu_j}{\lambda_i} > 0. \qquad (8\text{-}62)$$

如同命题 8.4 之证，易指明 $\bar{e}_i > 0$，因而由式(8-60)有 $\nu_i = 0$. 结合式(8-53)、(8-54)，有

$$\begin{aligned} \overline{w}_H - g(\bar{e}_H, \theta_H) &\geqslant \overline{w}_L - g(\bar{e}_L, \theta_H) \\ &> \overline{w}_L - g(\bar{e}_L, \theta_L) \geqslant v^{-1}(\overline{u}), \qquad (8\text{-}63) \end{aligned}$$

这与式(8-60)一起推出 $\gamma_H = 0$，于是由式(8-62)有 $\mu_H > 0$；进而有

$$\begin{aligned} \gamma_L &= 1 - \mu_L + \frac{\lambda_H \mu_H}{\lambda_L} && \text{(用式(8-62))} \\ &= 1 - \mu_L + \frac{\lambda_H}{\lambda_L}\left(1 + \frac{\lambda_L \mu_L}{\lambda_H}\right) && \text{(用式(8-62))} \\ &= 1 + \frac{\lambda_H}{\lambda_L} > 0, \end{aligned}$$

这结合式(8-60)、(8-63)得出式(8-57). 以式(8-62)代入式(8-59)，得

$$\pi'(\bar{e}_i) = g_e(\bar{e}_i, \theta_i) + \frac{\lambda_j \mu_j}{\lambda_i}[g_e(\bar{e}_i, \theta_i) - g_e(\bar{e}_i, \theta_j)]. \qquad (8\text{-}64)$$

这结合 $\mu_H > 0$ 及 $g_{e\theta}(\bar{e}_i, \theta) < 0$，得

$$\pi'(\bar{e}_H) \leqslant g_e(\bar{e}_H, \theta_H), \quad \pi'(\bar{e}_L) > g_e(\bar{e}_L, \theta_L). \qquad (8\text{-}65)$$

必定 $\bar{e}_L < e_L^*$. 否则 $\bar{e}_L \geqslant e_L^*$，由此推出

$$\begin{aligned} \pi'(\bar{e}_L) &\leqslant \pi'(e_L^*) = g_e(e_L^*, \theta_L) && \text{(用式(8-48))} \\ &\leqslant g_e(\bar{e}_L, \theta_L) < \pi'(\bar{e}_L), && \text{(用式(8-44)、(8-65))} \end{aligned}$$

得出矛盾. 若 $\bar{e}_H < e_H^*$，则

$$\begin{aligned} \pi'(e_H^*) &< \pi'(\bar{e}_H) \leqslant g_e(\bar{e}_H, \theta_H) && \text{(用式(8-42)、(8-65))} \\ &< g_e(e_H^*, \theta_H) = \pi'(e_H^*), && \text{(用式(8-44)、(8-48))} \end{aligned}$$

得出矛盾. 因此 $\bar{e}_H \geqslant e_H^* > e_L^* > \bar{e}_L$(用式(8-49)). 若 $\mu_i > 0$，则由式(8-61)，有

$$\overline{w}_i - \overline{w}_j = g(\bar{e}_i, \theta_i) - g(\bar{e}_j, \theta_i);$$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\overline{w}_H - \overline{w}_L) + (\overline{w}_L - \overline{w}_H) \\
&= [g(\bar{e}_H, \theta_H) - g(\bar{e}_L, \theta_H)] - [g(\bar{e}_H, \theta_L) - g(\bar{e}_L, \theta_L)] \\
&= \int_{\theta_L}^{\theta_H} [g_\theta(\bar{e}_H, \theta) - g_\theta(\bar{e}_L, \theta)] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\bar{e}_L}^{\bar{e}_H} \int_{\theta_L}^{\theta_H} g_{e\theta}(e, \theta) \mathrm{d}e \mathrm{d}\theta < 0
\end{aligned}
$$

（这用到 $\bar{e}_L < \bar{e}_H, \theta_L < \theta_H, g_{e\theta}(e,\theta) < 0$），得出矛盾. 因此 $\mu_L = 0$，代入式(8-64)得 $\pi'(\bar{e}_H) = g_e(\bar{e}_H, \theta_H)$；与式(8-48)比较得 $\bar{e}_H = e_H^*$. 于是式(8-55)得证.

结合式(8-49)、(8-57)、(8-55)即得出式(8-56). □

现在来比较一下信息完全与不完全这两种情况的福利后果. 在雇主信息不完全的情况下，由于经理是无限厌恶风险者，他的期望效用就是最低效用 $\bar{u}$，这与信息完全的情况并无不同. 至于雇主的情况，则要作以下计算

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \lambda_i [\pi(e_i^*) - w_i^*] - \sum_i \lambda_i [\pi(\bar{e}_i) - \overline{w}_i] \\
&= \lambda_H (\overline{w}_H - w_H^*) + \lambda_L [\pi(e_L^*) - \pi(\bar{e}_L) - w_L^* + \overline{w}_L] \quad \text{(用式(8-55))} \\
&> \lambda_L [\pi(e_L^*) - \pi(\bar{e}_L) - w_L^* + \overline{w}_L] \quad \text{(用式(8-56))} \\
&= \lambda_L [\pi(e_L^*) - \pi(\bar{e}_L) - g(e_L^*, \theta_L) + g(\bar{e}_L, \theta_L)] \quad \text{(用式(8-49)、(8-57))} \\
&= \lambda_L \int_{\bar{e}_L}^{e_L^*} [\pi'(e) - g_e(e, \theta_L)] \mathrm{d}e \\
&= \lambda_L \int_{\bar{e}_L}^{e_L^*} \mathrm{d}e \int_{e}^{e_L^*} [g_{ee}(s, \theta_L) - \pi''(s)] \mathrm{d}s > 0. \quad \text{(用式(8-48)、(8-42)、(8-44))}
\end{aligned}
$$

可见雇主的期望收益严格下降. 这就表明，在信息不对称的情况下，最优合同不是 Pareto 最优的，它带来福利损失.

第九章　社会选择

设一经济中有 I 个经济人 $i=1,2,\cdots,I$，每个经济人 i 在共同的选择集 X 上有一理性偏好 $\succcurlyeq_i$ 及其效用表示 $u_i(\cdot)$. 社会选择理论的基本问题是：个体选择在多大程度上可综合为某个社会选择或集体选择？这又可以分解为 3 大问题：

（1）是否存在一种规则，使得任一组个体偏好 $\succcurlyeq_i(1\leqslant i\leqslant I)$ 能在"充分合理"的形式下综合为一个社会偏好 $\succcurlyeq$？这一问题的回答是否定的，这一结论将在 9.1 节中给出.

（2）是否存在一种规则，使得任一组个体效用水平 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_I)$ 都能综合为某个合理的社会效用水平 $W(u)$？这一问题将在 9.2 节中讨论.

（3）如果个体的偏好依赖于一个随机地出现的信号，是否存在一种激励机制，足以诱使个体诚实地显示各自的信号，从而导致总体上具某种最优性的社会选择？这就是将在 9.3 节中讨论的机制设计问题.

对于公共选择集 X 不作任何特殊限定，这就使得本章的结论可作尽可能广泛的应用. 本章谈到 X 上的偏好时，总是指理性偏好. 分别以 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{U}$ 记 X 上的偏好之全体与效用函数之全体；$\mathscr{R}^I$ 记个体偏好组合$(\succcurlyeq_1,\succcurlyeq_2,\cdots,\succcurlyeq_I)$之全体，$\mathscr{U}^I$ 的含义仿此. 为书写简便起见，将每个$(\succcurlyeq_1,\succcurlyeq_2,\cdots,\succcurlyeq_I)\in\mathscr{R}^I$ 简写为$(\succcurlyeq_i)$. 类似地，将每个$(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_I)\in\mathscr{U}^I$ 简写为 $\tilde{u}$；与此相对应，以 u 表示$(u_1,u_2,\cdots,u_I)\in\mathbf{R}^I$，它可看做一组个体效用水平. 本章还用到 $\mathscr{R}$ 的一个子集 $\mathscr{P}$，它由 X 上的所有反对称偏好组成. $\succcurlyeq$ 是反对称的 $\Leftrightarrow x\succcurlyeq y\succcurlyeq x$ 蕴涵 $x=y\Leftrightarrow$ 关于 $\succcurlyeq$ 的无差别集皆为单点集. 约定 $\mathscr{A}=\mathscr{R}^I$ 或 $\mathscr{P}^I$.

9.1 社会偏好与选择

9.1.1 社会福利泛函

现在我们着手考虑本章引言中提出的问题：寻求某种规则，使之能从任一组个体偏好 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{R}^I$ 综合出某个社会偏好 $\succcurlyeq$. 这样的问题出现于社会生活的各个领域，其现实意义是不言而喻的. 例如，消费者对商品各有所好，你如何描述一般的消费者倾向？对于某一组影片观众评价不一，你如何依某个社会综合评价排列出优劣顺序？对于有关公共事务的某一重大问题众说纷纭，你如何设计一种表决程序用来得出较可信的社会公论？凡此种种，可以归纳为如下的问题：如何从分散的个体意见综合出集中的社会倾向？

显然，你不会指望如此宏大的问题会有一个简单的解决办法. 否则，现实世界中就不会有那样多的歧见与纷争了. 从运用数学方法的角度考虑，首先要做的并不是去设计构成社会偏好的某一特殊规则，而是给出一个能作为讨论起点的概念框架. 我们将任何形成社会偏好的规则称为社会福利泛函. 形式上，所谓社会福利泛函就是形如

$$F : \mathscr{A} \to \mathscr{R}(\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I)$$

的函数. 任给一组 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$, $F(\succcurlyeq_i) = F(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \cdots, \succcurlyeq_I)$ 是 X 上一个确定的偏好，称它为由 F 从个体偏好 $(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \cdots, \succcurlyeq_I)$ 导出的社会偏好；与偏好 $F(\succcurlyeq_i)$ 相应的严格偏好约定记为 $F_p(\succcurlyeq_i)$.

你一定注意到，关于社会福利泛函的以上定义实质上是极其贫乏的：它既未提供形成社会偏好的任何明确规则，又不能保证由社会福利泛函所界定的社会偏好确有某种社会公信度. 为了导向实质性的结果，我们紧接着可做两件事：其一是构成一些具体的、有某种现实性的社会福利泛函，例如，可取

$$F(\succcurlyeq_i) = \succcurlyeq_1,$$

其中,1 是处在特殊地位的某一个体. 其二是对社会福利泛函附加某些有明显直观意义的条件. 后一件事是更有意义的.

定义 9.1　设 $F: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ 是一个社会福利泛函.

1° 若从 $x \succ_i y (1 \leqslant i \leqslant I)$ 恒推出 $xF_p(\succcurlyeq_i)y$(尊重全体一致),则说 F 是 Pareto 的,或说 F 具有 Pareto 性.

2° 若存在 $h \in I$,使得从 $x \succ_h y$ 恒推出 $xF_p(\succcurlyeq_i)y$,则说 F 是(由个体 h)独裁的,且称 h 为独裁者.

3° 若对任何 $x,y \in X$ 与 $(\succcurlyeq_i),(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$,当 $(\succcurlyeq_i)$ 与 $(\succcurlyeq_i')$ 限制在 $\{x,y\}$ 上一致时,$F(\succcurlyeq_i)$ 与 $F(\succcurlyeq_i')$ 亦在 $\{x,y\}$ 上一致,则说 F 满足二元独立性条件,或简单地说 F 是独立的.

上述定义所界定的 Pareto 性与独裁性,其意义十分明显,无需解释. 独立性条件则稍显复杂. 直观上,它意味着,若要用社会偏好比较 x,y,则只要看个体如何比较 x,y 就行了,而不必顾及个体对 x,y 之外的对象的偏好如何.

Pareto 性与独立性似乎都应为一个可接受的社会福利泛函所具有;而独裁性则不是现代人所希望的. 然而不幸的是,Pareto 性与独立性一起恰恰蕴涵了独裁性! 这就是 Arrow(1963)所证明的令人震惊的以下定理.

定理 9.1(Arrow 不可能定理)　设 X 至少含 3 个元素,$F: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ 是 Pareto 的且满足二元独立性条件,则 F 是独裁的.

证　以下提到 X 中一对元(如 x,y)时,总设其互异且有序. 给定 $S \subset I$ 与 $\{x,y\} \subset X$,若对任何 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$,当 $x \succ_i y \succ_j x (\forall i \in S, \forall j \in I \backslash S)$ 时恒有 $xF_p(\succcurlyeq_i)y$,则说 S 决定 x,y;若 S 决定任何 $x,y \in X$,则称 S 为决定性的. 证明的基本思想是说明有某个 $h \in I$,使 $\{h\}$ 是决定性的. 为此需要建立关于决定性集的一系列预备性结论.

1° 设 $S \subset I$ 决定某对元 x,y,证 S 决定任一对元 z,u,从而是决定性的. 为此,只需证 S 决定 x,z(同理可证 S 决定 z,y,进而得出 S 决定 z,u). 可设 $z \neq x,y$. 选取一组 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$,使得

$$\begin{cases} x \succ_i y \succ_i z & (\forall\ i \in S), \\ y \succ_j z \succ_j x & (\forall\ j \in I \backslash S). \end{cases} \tag{9-1}$$

令 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$. 由 S 决定 x,y 与设定(9-1)得 $x \succ y$；由 F 是 Pareto 的与式(9-1)得 $y \succ z$，因而 $x \succ z$. 由独立性条件，结论 $x \succ z$ 仅决定于 $x \succ_i z (\forall\ i \in S)$ 与 $z \succ_j x (\forall\ j \in I \backslash S)$，而与 $(\succcurlyeq_i)$ 的选取无关，这表明 S 决定 x,z.

2° 设 $S, T \subset I$ 是决定性的，证 $S \cap T$ 是决定性的. 取 3 个元 $x, y, z \in X$，则 S 决定 x,y，T 决定 y,z，今证 $S \cap T$ 决定 x,z. 取 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，使得

$$\begin{cases} x \succ_i y \succ_i z & (\forall\ i \in S \cap T), \\ z \succ_j x \succ_j y & (\forall\ j \in S \backslash T), \\ y \succ_k z \succ_k x & (\forall\ k \in T \backslash S), \\ z \succ_l y \succ_l x & (\forall\ l \in I \backslash (S \cup T)). \end{cases} \tag{9-2}$$

令 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$. 依据设定式(9-2)，由 S 决定 x,y 得 $x \succ y$，由 T 决定 y,z 得 $y \succ z$，从而 $x \succ z$. 再用独立性条件得 $S \cap T$ 决定 x,z.

3° 设 $S \subset I$ 不是决定性的，证 $T = I \backslash S$ 是决定性的. 取 3 个元 $x,y,z \in X$ 及 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，使得

$$\begin{cases} x \succ_i z \succ_i y & (\forall\ i \in S), \\ y \succ_j x \succ_j z & (\forall\ j \in T). \end{cases} \tag{9-3}$$

令 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$. S 必不决定 x,y，故由式(9-3)有 $y \succcurlyeq x$. 又由式(9-3)及 Pareto 性有 $x \succ z$，因而 $y \succ z$，这表明 T 决定 y,z.

4° 设 S 是决定性的，$S \subset T \subset I$，证 T 是决定性的. 若 T 不是决定性的，则由已证的 3° 知 $I \backslash T$ 是决定性的，因而 $\varnothing = S \cap (I \backslash T)$ 是决定性，但这显然与 F 的 Pareto 性相矛盾.

5° 设 S 是所有决定性集之交，证 $S = \{h\}$ 且 h 是独裁者. S 必是决定性的，因而 $S \neq \varnothing$. 取 $h \in S$，则 $S' \triangleq I \backslash (S \backslash \{h\})$ 是决定性的，从而 $\{h\} = S \cap S'$ 是决定性的. 因 $S \subset \{h\}$，故必 $S = \{h\}$. 设 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，$x \succ_h y$，令 $T = \{i \in I : i \neq h$ 且 $x \succcurlyeq_i y\}$. 取 $z \in X$，$z \neq x, y$；再取 $(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$，使得

$$\begin{cases} x \succ_i' y \succ_i' z & (\forall\ i \in T), \\ y \succ_j' z \succ_j' x & (j \in I \backslash T, j \neq h), \\ x \succ_h' z \succ_h' y. \end{cases} \tag{9-4}$$

令 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$，$\succcurlyeq' = F(\succcurlyeq_i')$. 由 $T \cup \{h\}$ 是决定性的与设定式(9-4) 得 $x \succ' z$；由 $\{h\}$ 是决定性的与式(9-4) 得 $z \succ' y$，因而 $x \succ' y$. 由独立性条件得 $x \succ y$，这表明 h 是独裁者. □

刚刚证明的这个结果也许使你颇感沮丧. 你很可能本来相信，总可以找到一种规则，用以从任一组个体偏好综合出适当的社会偏好，且满足 Pareto 性、独立性条件与非独裁性. 但 Arrow 的定理断言这是不可能的！实际上，事情远没有那么糟糕. 首先，定理 9.1 只不过是断言存在一个 $h \in I$，使得 $x \succ_h y$ 恰好推出 $xF_p(\succcurlyeq_i)y$，这与个体 h 是否有强制他人服从的权威与意志力毫无关系. 不应在 h 身上赋予作为一种政治概念的独裁者的色彩. 其次，定理 9.1 的结论依赖于关于 $F(\cdot)$ 的 Pareto 性与独立性假设，其中至少独立性条件是否完全满足是大可讨论的. 如果适当降低这一条件，就未必能导出独裁性结论. 还有，$F(\cdot)$ 的定义域过大也是一个问题. 当然，我们希望最小的决定性集能包含较多的社会成员，至少不仅由一人组成. 但要得出这样的结果，个体的偏好就必须多少有某些共性，而不能漫无边际. 这样一来，我们就得以 $\mathscr{R}^I$ 的一个小得多的子集来替代 $\mathscr{A}$.

下面用一个简单而著名的例子来说明，个体偏好过于互相冲突，会使得形成合理的集体偏好成为不可能.

例 9.1（投票悖论） 设 $I = 3, X = \{x, y, z\}$，个体偏好 $\succcurlyeq_i (i = 1,2,3)$ 界定如下

$$x \succ_1 y \succ_1 z,$$
$$y \succ_2 z \succ_2 x,$$
$$z \succ_3 x \succ_3 y.$$

设 F 是某个社会福利泛函，$\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_3)$ 是由 $\succcurlyeq_i (i = 1, 2,3)$ 决定的集体偏好. 容易看出，$\succcurlyeq$ 不可能是多数表决的结果. 实

际上，直接看出依照多数表决会得出

$$x \succ y, \quad y \succ z, \quad z \succ x,$$

而这就违背了传递性($x \succ y, y \succ z \Rightarrow x \succ z$)，致使 $\succcurlyeq$ 不是一个理性偏好！由此可见，由 F 作成的集体偏好，难以兼顾3个体的意见.

9.1.2 社会选择函数

给定一个社会福利泛函 $F(\cdot)$，就能从每组个体偏好 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$ 惟一确定一个社会偏好 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$；然后依据偏好 $\succcurlyeq$ 取最优，就可在 X 中完成社会选择. 另一方面，从 1.3 节中所述的观点来看，亦可取另一条似乎更直接的途径：由个体偏好 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$ 依一定规则决定社会选择 $x \in X$. 这就导致社会选择函数的概念. 形式上，所谓社会选择函数就是形如

$$f : \mathscr{A} \to X \quad (\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I)$$

的函数. 对于任何给定的 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$, $x = f(\succcurlyeq_i) = f(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \cdots, \succcurlyeq_I)$ 表示用规则 f 从个体偏好 $\succcurlyeq_i (1 \leqslant i \leqslant I)$ 得出的集体选择结果. 如同对于社会福利泛函一样，此处对社会选择函数亦不作任何限定，以使这一概念具有最大的一般性.

社会选择函数在形态上无疑很不同于社会福利泛函. 但有趣的是，对于两者可展开一些互相平行的概念，且导致类似的结果. 首先给出对应于定义 9.1 的以下定义.

定义 9.2 设 $f : \mathscr{A} \to X$ 是一个社会选择函数.

1° 若对任给 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，不存在 $x \in X$，使得

$$x \succ_i f(\succcurlyeq_i) \quad (\forall\, i \in I),$$

其中 $f(\succcurlyeq_i) = f(\succcurlyeq_1, \cdots, \succcurlyeq_I)$，则说 f 是弱 Pareto 的.

2° 若存在 $h \in I$，使得对任给 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，有

$$f(\succcurlyeq_i) \succcurlyeq_h x \quad (\forall\, x \in X),$$

则说 f 是(由个体 h)独裁的，且称 h 为独裁者.

3° 若对任给 $(\succcurlyeq_i), (\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$, $x = f(\succcurlyeq_i)$，当

$$x \succcurlyeq_i y \Rightarrow x \succcurlyeq_i' y \quad (\forall\, i \in I, \forall\, y \in X) \tag{9-5}$$

时 $x = f(\succcurlyeq_i')$，则说 f 是单调的.

对以上定义作点解释. f 是弱 Pareto 的意味着，对任何给定的 $(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，$\bar{x} = f(\succcurlyeq_i)$ 是这样的最优选择，已无法选择另一个 $x \in X$，使得每一个体都获得严格改善. 独裁的意义是清楚的. 单调性显得复杂些，它可以这样理解：条件(9-5) 意味着对每一个体 i，当依偏好 $\succcurlyeq_i$ 认定 x 有某种最优性时，依偏好 $\succcurlyeq_i'$ 亦然. 因而依偏好$(\succcurlyeq_i')$ 亦应选择 x. 从直观上看，弱 Pareto 性与单调性似乎是可接受的. 但这两个性质一起同样导致类似于定理 9.1 的不可能结果.

定理 9.2(关于社会选择的不可能定理)　设 X 至少含 3 个元素，$f: \mathscr{A} \to X$ 是弱 Pareto 的与单调的，则 f 是独裁的.

证　基本想法是转化为一个社会福利泛函问题，然后应用定理 9.1 推出所要结论.

1° 定义 $F: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$. 任给$(\succcurlyeq_i)$，$(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$，$x, y \in X$，若

$$\begin{cases} x \succcurlyeq_i y \Leftrightarrow x \succcurlyeq_i' y \quad (\forall\, i \in I), \\ x \succ_i' z, \quad y \succ_i' z \quad (\forall\, i \in I, \forall\, z \neq x, y), \end{cases}$$

则说四元组 $((\succcurlyeq_i), (\succcurlyeq_i'), x, y)$ 具有性质(P). 给定$(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$. 任给 $x, y \in X$，若 $x = y$，或者存在$(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$，使$((\succcurlyeq_i), (\succcurlyeq_i'), x, y)$ 具有性质(P)，且 $x = f(\succcurlyeq_i')$，则定义 $x \succcurlyeq y$. 这就得到 X 上的一个二元关系 $\succcurlyeq$. 由 f 的单调性，$x \succcurlyeq y$ 的定义与$(\succcurlyeq_i')$ 的选择无关. 对任何 $x, y \in X$，$x \neq y$，必可选取$(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$，使得$((\succcurlyeq_i), (\succcurlyeq_i'), x, y)$ 具有性质(P). 若 $x, y \neq f(\succcurlyeq_i')$，则由性质(P) 有 $x \succ_i' f(\succcurlyeq_i')$ $(\forall\, i \in I)$，这与 f 是弱 Pareto 的矛盾. 因此必有 x, y 之一，例如 $x = f(\succcurlyeq_i')$，从而 $x \succcurlyeq y$. 这表明 $\succcurlyeq$ 是完全的. 类似的论证(但稍繁琐些，不予细述) 可说明 $\succcurlyeq$ 是传递的，因此 $\succcurlyeq \in \mathscr{R}$. 定义 $F(\succcurlyeq_i) = \succcurlyeq$，则得到一个社会福利泛函 $F: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$.

2° 任给$(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，证 $x = f(\succcurlyeq_i)$ 关于偏好 $\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$ 是最优的. 任给 $y \in X$，若 $x \neq y$，则必有$(\succcurlyeq_i') \in \mathscr{A}$，使$((\succcurlyeq_i), (\succcurlyeq_i'), x, y)$ 有性质(P). 由 f 的单调性有 $x = f(\succcurlyeq_i')$，从而 $x \succcurlyeq y$.

3° 证明 $F(\cdot)$ 是 Pareto 的. 设$(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$，$\succcurlyeq = F(\succcurlyeq_i)$，$x$

$\succ_i y(\forall\ i \in I)$. 若 $y \succcurlyeq x$,则可取$(\succcurlyeq_i{}') \in \mathscr{A}$,使$((\succcurlyeq_i),(\succcurlyeq_i{}'),x,y)$有性质(P),且 $y = f(\succcurlyeq_i{}')$,从而$x \succ_i f(\succcurlyeq_i{}')(\forall\ i \in I)$,但这与 f 的弱 Pareto 性相矛盾. 因此 $x \succ y$,即 $F(\cdot)$ 是 Pareto 的.

4° $F(\cdot)$ 满足二元独立性条件. 设$(\succcurlyeq_i),(\succcurlyeq_i{}') \in \mathscr{A}$ 限制在 $\{x,y\} \subset X$ 上一致,则对任给$(\succcurlyeq_i{}'') \in \mathscr{A}$,$((\succcurlyeq_i),(\succcurlyeq_i{}''),x,y)$有性质(P)$\Leftrightarrow$$((\succcurlyeq_i{}'),(\succcurlyeq_i{}''),x,y)$有性质(P),这推出 $F(\succcurlyeq_i)$ 与 $F(\succcurlyeq_i{}')$ 在$\{x,y\}$上一致.

5° 证 f 是独裁的. 由定理 9.1,$F(\cdot)$由某个 $h \in I$ 独裁. 这推出 f 亦由 h 独裁. 否则,存在$(\succcurlyeq_i) \in \mathscr{A}$,$x \in X$,使得

$$x \succ_h f(\succcurlyeq_i) \triangleq y.$$

$F(\cdot)$由 h 独裁推出 $xF_p(\succcurlyeq_i)y$. 但由已证的 2° 应有 $yF(\succcurlyeq_i)x$,得出矛盾. □

9.1.3 表决问题

表决是最简单、或许也是最重要的社会选择行为,它可以纳入社会福利泛函的一般框架之内. 设 $i = 1,2,\cdots,I$ 是投票者之全体,每个 i 在对象 x,y 之间有 3 种可能的偏好:x 优于 y、x 与 y 无差别、y 优于 x. 对于这 3 种情况,i 分别投赞成票(赞成选择 x)、弃权票与反对票. 相应地,表决的结果亦有 3 种可能:选择 x、不确定、选择 y. 所谓表决规则,正是一个社会福利泛函 $F:\mathscr{R}^I \to \mathscr{R}$,$\mathscr{R}$ 是 $X = \{x,y\}$ 上的偏好之全体. 在这一特殊情况下,最好的办法是以 $D = \{1,0,-1\}$ 取代 $\mathscr{R}$,其中 $1,0,-1$ 分别表示赞成、弃权与反对. 形如 $F:D^I \to D$ 的函数称为表决函数,每个表决函数决定一个表决规则. 常用的表决函数有:简单多数表决函数

$$F(\alpha) = \operatorname{sgn} \sum_i \alpha_i, \tag{9-6}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_I) \in D^I$;一致同意表决函数

$$F(\alpha) = \min_i \alpha_i.$$

有趣的是,表决函数式(9-6)可由若干特征性质完全刻画.

定理 9.3(May 定理,1952) $F: D^I \to D$ 为简单多数表决函数当且仅当它具有以下性质.

1° 对称性:$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_I)$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_I$ 的顺序无关.

2° 奇性:$F(-\alpha) = -F(\alpha)$.

3° 正相关性:若 $F(\alpha) \geqslant 0$,$\alpha' > \alpha$(即 $\alpha_i' \geqslant \alpha_i$,且至少对某个 i 有 $\alpha_i' > \alpha_i$),则 $F(\alpha') = 1$.

直观上,性质 1°意味着投票者有平等权利,或者投票是匿名的;性质 2°意味着通过与否决的机制相同,即表决是中性的;性质 3°意味着,在一定条件下,任何人意向的改变对表决结果都可能是决定性的.

证 若 $F(\cdot)$ 表为式(9-6),则它显然有性质 1°~3°. 现在设 $F: D^I \to D$ 具有性质 1° ~ 3°,取定 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_I) \in D^I$,证明 $F(\alpha)$ 必表为式(9-6). 分 3 种情况讨论.

1° 若 $\sum \alpha_i = 0$,则 α_i 中的 1 与 -1 的个数相同,于是

$$F(\alpha) = F(-\alpha) \qquad (\text{用性质 } 1°)$$
$$= -F(\alpha), \qquad (\text{用性质 } 2°)$$

这得出 $F(\alpha) = 0 = \operatorname{sgn} \sum \alpha_i$.

2° 若 $\sum \alpha_i < 0$,则必 $F(\alpha) = -1 = \operatorname{sgn} \sum \alpha_i$. 否则,$F(\alpha) \geqslant 0$,于是总可以将 α 调整为 $\alpha' \in D^I$,使得 $\alpha' > \alpha$,$\sum \alpha_i' = 0$,因而 $F(\alpha') = 0$. 另一方面由性质 3° 有 $F(\alpha') = 1$,得出矛盾.

3° 若 $\sum \alpha_i > 0$,则 $\sum (-\alpha_i) < 0$,于是

$$-1 = F(-\alpha) = -F(\alpha), \quad (\text{用性质 } 2°)$$

从而 $F(\alpha) = 1 = \operatorname{sgn} \sum \alpha_i$. □

9.2 社会效用

9.2.1 社会福利函数

现在转向本章引论中提出的第二个问题：寻求某种规则或评价标准，使之得以从任何一组个体效用水平 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_I)\in\mathbf{R}^I$ 综合出一个社会效用水平. 这样一种社会评价体系的存在，正是政策制定者据以进行选择、并实现社会最优效用的前提. 如同在9.1节中处理社会偏好问题一样，在此处我们也面临类似的困难：要将各个个体的效用水平综合或加总为一个社会效用水平，并无任何普遍适用的简单方案. 因此，我们的出发点不是某个特定的社会效用评价标准，而是一个一般的概念框架.

如同前述，对任一组个体效用水平 $u\in\mathbf{R}^I$，需要有一定方法决定一个社会效用水平 $W(u)$，$W(u)$ 也可看做是由 u 决定的社会福利水平. 这就导致社会福利函数的概念. 形式上，我们称任何形如 $W(\cdot):U\to\mathbf{R}$ 的函数为社会福利函数，其中 U 是 $\mathbf{R}^I$ 的某个子集. 至于 $W(\cdot)$ 是否是一个好的社会福利函数 —— 这意味着 $W(u)$ 是对 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_I)$ 的一个合理加总 —— 当然取决于它是否具有某些直观上很自然的性质.

定义 9.3 设 $W(\cdot):U\to\mathbf{R}$ 是一个社会福利函数. 若 $W(\cdot)$ 是严格单调增的，即(参见式(1-5))

$$u\leqslant u'\Rightarrow W(u)\leqslant W(u')\quad ,u\ll u'\Rightarrow W(u)<W(u'), \tag{9-7}$$

则说 $W(\cdot)$ 有 Pareto 性质. 若 $W(\cdot)$ 是强单调增的，即

$$u<u'\Rightarrow W(u)<W(u')\quad (u,u'\in U), \tag{9-8}$$

则说 $W(\cdot)$ 是严格 Pareto 的.

Pareto 性质体现了社会效用与个体效用的正相关性. 一个不具备 Pareto 性质的社会福利函数显然是难以接受的. 此外，还有

一些备选的性质虽不及 Pareto 性质那样具有普遍性，有时也是重要的. 例如对称性，即 $W(\cdot)$ 是对称函数，这意味着个体效用在形成社会效用时处于平等地位；凹性，即 $W(\cdot)$ 是凹函数，这意味着社会倾向于高估均衡(而非两极分化)的福利.

最好是通过一些例子来解释上述概念.

1. 功利主义的福利函数

$$W(u) = b \cdot u, \quad u \in U, \tag{9-9}$$

其中，$b \in \mathbf{R}^I_{++}$. 式(9-9)显然是严格 Pareto 的凹函数，当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_I$ 时 $W(\cdot)$ 是对称的. 在后一情况下，$W(\cdot)$ 称为纯功利主义福利函数.

2. 广义功利主义福利函数

$$W(u) = \sum_i g(u_i), \quad u = (u_i) \in U, \tag{9-10}$$

其中，$g(\cdot): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是严格增的凹函数. 容易验证，式(9-10)是严格 Pareto 的、对称的凹函数.

3. 常弹性福利函数

$$W_\rho(u) = \Big(\sum_i u_i^{1-\rho}\Big)^{1/(1-\rho)} \quad (0 \leqslant \rho \neq 1); \tag{9-11}$$

$$W_1(u) = \lim_{\rho \to 1} W_\rho(u) = \sqrt[I]{u_1 u_2 \cdots u_I}, \tag{9-12}$$

其中 $u \gg 0$. 可验证 $W_\rho(\cdot)$ 是严格 Pareto 的、对称的凹函数. 常弹性乃指以下性质(参见 2.2.6 小节)：

$$\sum_i E_{Wu_i} = \sum_i \frac{u_i}{W} \frac{\partial W}{\partial u_i} = 1.$$

再回到一般的社会福利函数 $W(\cdot): U \to \mathbf{R}$. 我们还未说明，应如何选定其定义域 U. 因 $u \in U$ 表个体效用水平，自然要求 U 是所有可能取到的个体效用水平 $(u_1, u_2, \cdots, u_I)$ 之集，即所谓效用可能性集. 这一概念我们在 4.1.3 小节中就已用过了，现在将其一般化. 设每一个体 i 有一效用函数 $\tilde{u}_i: X \to \mathbf{R}$，令 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_I): X \to \mathbf{R}^I$，则称

$$U = \{u \in \mathbf{R}^I : u \leqslant \tilde{u}(x)(\exists\ x \in X)\} \qquad (9\text{-}13)$$

为(由效用函数 $\tilde{u}$ 决定的)效用可能性集(UPS). U 关于向量序 $\geqslant$ 的极大元之集(参照式(4-7))

$$\max U = \{u \in U : \text{不存在 } u' \in U \text{ 使 } u' > u\} \qquad (9\text{-}14)$$

称为 U 的 Pareto 边界,它是 U 的通常边界 ∂U 的一部分(如图 9-1).

由 U 的定义直接看出,若 $u' \leqslant u \in U$,则必 $u' \in U$. 这一性质可缩写成

$$U - \mathbf{R}^I_+ \subset U, \qquad (9\text{-}15)$$

这可与生产集的类似性质(参见 3.1.1 小节(P_3))相对照. 几何上,式(9-15)意味着 U 的左下方是无限伸展的(如图 9-1).

图 9-1

注意式(4-6)所定义的效用可能性集 U 是这里所说的效用可能性集的特殊情况. 为使定义式(9-13)能包括式(4-6),只要取 X 为可行配置 $(x,y) = (x_1,x_2,\cdots,x_I,y_1,y_2,\cdots,y_J)$ 之全体(在 4.1 节中记为 A),而 $\tilde{u}(x)$ 则代之以函数(4.1 节中记为 $u(x)$)

$$\tilde{u}(x,y) = (u_1(x_1),u_2(x_2),\cdots,u_I(x_I)).$$

9.2.2 社会福利泛函

以 $\mathscr{U}$ 记 X 上的效用函数之全体,每一

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$$

表示一组个体效用函数. 现在我们以 $\mathscr{U}^I$ 取代 $\mathscr{R}^I$,建立一个与 9.1.1 小节平行的理论. 任何形如 $F : \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ 的函数称为社会福利泛函. $F(\tilde{u}) = F(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_I)$ 可解释为由个体效用函数 $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_I$ 所决定的社会偏好. 以 $F_p(\tilde{u})$ 记相应于 $F(\tilde{u})$ 的严格偏好. 以下定义则恰与定义 9.1 相当.

定义 9.4 设 $F : \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ 是一个社会福利泛函.

1° 若从 $\tilde{u}(x) \geqslant \tilde{u}(y)$ 恒推出 $xF(\tilde{u})y$，从 $\tilde{u}(x) \gg \tilde{u}(y)$ 恒推出 $xF_p(\tilde{u})y$，则说 F 是 Pareto 的.

2° 若存在 $h \in I$，使得从 $\tilde{u}_h(x) > \tilde{u}_h(y)$ 恒推出 $xF_p(\tilde{u})y$，则说 F 是(由个体 h) 独裁的，并称 h 为独裁者.

3° 若对任何 $x, y \in X$ 与 $\tilde{u}, \tilde{u}' \in \mathscr{U}^I$，当 $\tilde{u}, \tilde{u}'$ 限制在 $\{x, y\}$ 上相等时，$F(\tilde{u})$ 与 $F(\tilde{u}')$ 限制在 $\{x, y\}$ 上一致，则说 F 满足二元独立性条件，或简单地说 F 是独立的.

$F(\tilde{u})$ 是一随 $\tilde{u}$ 变动的社会偏好，这一点似乎是不方便的. 一个自然的问题是，能否求得一个单一的规则，使得为判定 $xF(\tilde{u})y$，只要比较效用水平 $\tilde{u}(x)$ 与 $\tilde{u}(y)$ 就够了. 这相当于用 $\mathbf{R}^I$ 上的某一个偏好 $\geqslant$ 来完全描述所有的偏好 $F(\tilde{u})(\forall\ \tilde{u} \in \mathscr{U}^I)$. 这种偏好的存在性由以下基本定理所肯定.

定理 9.4 设 X 至少含 3 个元素，社会福利泛函 $F: \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ 是 Pareto 的且满足二元独立性条件，则存在 $\mathbf{R}^I$ 上的理性偏好 $\geqslant$，使得对任给 $\tilde{u} \in \mathscr{U}^I, x, y \in X$，有

$$xF(\tilde{u})y \Leftrightarrow \tilde{u}(x) \geqslant \tilde{u}(y). \tag{9-16}$$

证 显然，定理所要求的 $\geqslant$ 正好应由式(9-16)来定义. 因为 $\tilde{u}, x, y$ 变动时 $\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)$ 可遍取 $\mathbf{R}^I$ 中任何元，故式(9-16) 在整个 $\mathbf{R}^I$ 上定义了二元关系 $\geqslant$.

1° 验证 $\geqslant$ 的定义与 $\tilde{u}, x, y$ 的选取无关. 首先，由 F 满足独立性条件推出 $\geqslant$ 的定义与 $\tilde{u}$ 的选择无关. 若 $z \in X$ 使得 $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(z)$，则由 F 的 Pareto 性推出 x, z 关于偏好 $F(\tilde{u})$ 无差别，因而

$$xF(\tilde{u})y \Leftrightarrow zF(\tilde{u})y.$$

这表明定义关系式(9-16) 与 x 的选择无关. 同理它亦与 y 的选择无关.

2° 验证 $\geqslant$ 是理性的. 直接看出 $\geqslant$ 是完全的. 设 $u, v, w \in \mathbf{R}^I$，$u \geqslant v \geqslant w$，则有 $\tilde{u} \in \mathscr{U}^I, x, y, z \in X$，使得 $u = \tilde{u}(x), v = \tilde{u}(y)$，$w = \tilde{u}(z)$，$xF(\tilde{u})y$，$yF(\tilde{u})z$，因而 $xF(\tilde{u})z$，这表明 $u \geqslant w$. 可见 $\geqslant$ 是传递的.

$\succcurlyeq$ 的定义已表明式(9-16)恒满足，故 $\succcurlyeq$ 合乎定理要求. □

当 F 与 $\succcurlyeq$ 由关系式(9-16)联系时，称 F 为由偏好 $\succcurlyeq$ 生成的社会福利泛函.

虽然定理 9.4 的条件不足以保证 $\succcurlyeq$ 有效用表示存在，但存在某个效用表示无疑是我们所期待的，因为这将为一个深入的理论提供方便的分析工具. 因此，通常假定存在一个连续的、严格单调增的函数 $W(\cdot): \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$，它表示式(9-16)中的偏好 $\succcurlyeq$，因而

$$xF(\tilde{u})y \Leftrightarrow W(\tilde{u}(x)) \geqslant W(\tilde{u}(y)). \quad (9\text{-}17)$$

式(9-17)相当于对每个 $\tilde{u} \in \mathscr{U}^I$，$W(\tilde{u}(\cdot))$ 是 $F(\tilde{u})$ 的效用表示. 当式(9-17)恒成立时，称 $F(\cdot)$ 为由 $W(\cdot)$ 生成的社会福利泛函. 注意 $W(\cdot)$ 正是 9.2.1 小节中所说的社会福利函数. 这样，就将社会福利泛函与社会福利函数这两个概念联系起来了.

9.2.3 不变性

给定社会福利泛函 $F: \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$，假定它由 $\mathbf{R}^I$ 上的偏好 $\succcurlyeq$ 生成. 如在第一章中已指出的，表示个体偏好的效用水平一般并无内在意义. 因此，$\tilde{u} \in \mathscr{U}^I$ 经平移、成比例放大或缩小等变换之后，并不改变它所表示的个体偏好. 如果 $F(\tilde{u})$ 是个体偏好的一个合理综合，那么上述的变换也应使 F 保持不变. 形式上，这相当于要求 F 满足如下恒等式

$$F(\tilde{u} + \alpha e) = F(\tilde{u}) \quad (\alpha \in \mathbf{R}); \quad (9\text{-}18)$$

$$F(\beta\tilde{u}) = F(\tilde{u}) \quad (\beta > 0); \quad (9\text{-}19)$$

$$F(\tilde{u} + a) = F(\tilde{u}) \quad (a \in \mathbf{R}^I); \quad (9\text{-}20)$$

$$F(\beta_1\tilde{u}_1, \beta_2\tilde{u}_2, \cdots, \beta_I\tilde{u}_I) = F(\tilde{u}) \quad ((\beta_i) \gg 0), \quad (9\text{-}21)$$

其中，$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$，$e = (1,1,\cdots,1) \in \mathbf{R}^I$.

定义 9.5 当 $F(\cdot)$ 满足恒等式(9-18)、(9-19)、(9-20)、(9-21)时，分别说 $F(\cdot)$ 在相同的原点变换下不变、在相同的效用单位变换下不变、在独立的原点变换下不变、在独立的效用单位变换下不变；若 $F(\cdot)$ 满足式(9-18)、(9-19)，则说 $F(\cdot)$ 在相同的基

数变换下不变；若 $F(\cdot)$ 满足式(9-20)、(9-21)，则说 $F(\cdot)$ 不容许个体效用水平之间的比较.

利用关系式(9-16)，可将不变性条件式(9-18) ~ (9-21) 等价地表成关于偏好 $\succcurlyeq$ 的相应性质，它们依次为

$$u \succcurlyeq v \Leftrightarrow u + \alpha e \succcurlyeq v + \alpha e \quad (\alpha \in \mathbf{R}); \tag{9-18a}$$

$$u \succcurlyeq v \Leftrightarrow \beta u \succcurlyeq \beta v \quad (\beta > 0); \tag{9-19a}$$

$$u \succcurlyeq v \Leftrightarrow u + a \succcurlyeq v + a \quad (a \in \mathbf{R}^I); \tag{9-20a}$$

$$u \succcurlyeq v \Leftrightarrow (\beta_1 u_1, \beta_2 u_2, \cdots, \beta_I u_I) \succcurlyeq (\beta_1 v_1, \beta_2 v_2, \cdots, \beta_I v_I), \tag{9-21a}$$

其中 $u, v \in \mathbf{R}^I$, $(\beta_i) \gg 0$. 式(9-18a) ~ (9-21a) 中的 $\succcurlyeq$ 亦可改为 $\succ$ 或 $\sim$. 当 $\succcurlyeq$ 满足条件式(9-18a) ~ (9-21a)(或其一部分)时，可以推想 $\succcurlyeq$ 的效用表示将有很特殊的形式. 这正是以下定理所要表达的，它是本节的中心结果.

定理 9.5 设 $F: \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ 是一社会福利泛函，它由偏好 $\succcurlyeq$ 生成；$\succcurlyeq$ 有一个连续的、严格单调增的效用表示 $V(\cdot)$.

1° 若 $F(\cdot)$ 在相同的原点变换下不变，则 $\succcurlyeq$ 有如下效用表示

$$W(u) = \bar{u} - g(u - \bar{u}e), \quad u \in \mathbf{R}^I, \tag{9-22}$$

其中 $\bar{u} = \sum u_i / I$, $g(\cdot)$ 是定义在超平面 $H = \{u \in \mathbf{R}^I : \sum u_i = 0\}$ 上的一个函数. 若 $F(\cdot)$ 对相同的基数变换不变，则可要求式(9-22) 中的 $g(\cdot)$ 是 1 次齐次函数.

2° 若 $F(\cdot)$ 在独立的原点变换下不变，则 $\succcurlyeq$ 有如下效用表示

$$W(u) = b \cdot u, \quad u \in \mathbf{R}^I, \tag{9-23}$$

其中 $0 < b \in \mathbf{R}^I$. 若 $F(\cdot)$ 不容许个体效用水平之间的比较，则 $F(\cdot)$ 是独裁的.

证 1° 任给 $u \in \mathbf{R}^I$，由 $V(\cdot)$ 的严格单调性，必有惟一的 $\alpha \in \mathbf{R}$，使 $V(u) = V(\alpha e)$. 定义 $W(u) = \alpha$，则得到一个函数 $W(\cdot): \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$，它满足 $u \sim W(u)e (\forall\, u \in \mathbf{R}^I)$. 于是

$$\begin{aligned} u \succcurlyeq v &\Leftrightarrow W(u)e \succcurlyeq W(v)e \\ &\Leftrightarrow W(u) \geqslant W(v) \quad (\forall\, u, v \in \mathbf{R}^I), \end{aligned}$$

可见 $W(\cdot)$ 是 $\succcurlyeq$ 的效用表示. 若 $u-\bar{u}e=v-\bar{v}e, u, v\in\mathbf{R}^I$,则

$$
\begin{aligned}
W(u)e &\sim u = v + (\bar{u}-\bar{v})e \\
&\sim W(v)e + (\bar{u}-\bar{v})e, \quad (\text{用式(9-18a)})
\end{aligned}
$$

这推出 $W(u)=W(v)+\bar{u}-\bar{v}$,即

$$
\bar{u}-W(u)=\bar{v}-W(v).
$$

这表明 $\bar{u}-W(u)$ 是 $u-\bar{u}e$ 的函数,写作 $g(u-\bar{u}e)$,则式(9-22)成立.

若条件式(9-18)、(9-19) 均满足,$u\in\mathbf{R}^I, \beta>0$,则

$$
\begin{aligned}
&[\beta\bar{u}-g(\beta u-\beta\bar{u}e)]e \\
&= W(\beta u)e \sim \beta u \sim \beta W(u)e \quad (\text{用式(9-19a)}) \\
&= [\beta\bar{u}-\beta g(u-\bar{u}e)]e,
\end{aligned}
$$

这推出 $g(\beta u-\beta\bar{u}e)=\beta g(u-\bar{u}e)$,可见 $g(\cdot)$ 是 1 次齐次的.

2° 设 $u\sim u', u''=(u+u')/2$. 若 $u''\succ u$,则

$$
\begin{aligned}
u' &= u''+\frac{u'-u}{2} \\
&\succ u+\frac{u'-u}{2}=u''\succ u, \quad (\text{用式(9-20)})
\end{aligned}
$$

这与 $u\sim u'$ 相矛盾. 因此 $u\succcurlyeq u''$. 这又推出

$$
\begin{aligned}
u'' &= u+\frac{u'-u}{2} \\
&\succcurlyeq u''+\frac{u'-u}{2}=u'\sim u,
\end{aligned}
$$

故得 $u''\sim u$. 这表明 $\succcurlyeq$ 的无差别集必为超平面,它们一定互相平行,因而有共同的单位法向量,设为 b. 任给 $u\in\mathbf{R}^I$,有惟一的 $\alpha\in\mathbf{R}$,使 $u\sim\alpha b$. 因 u 与 αb 在 $\succcurlyeq$ 的同一无差别集内,故 $(u-\alpha b)\cdot b=0$,这得出 $\alpha=b\cdot u$. 如 1° 之证,$W(u)=\alpha=b\cdot u$ 即为 $\succcurlyeq$ 的效用表示,因而式(9-23) 得证. 由 $\succcurlyeq$ 的单调性推出 $b>0$.

若条件式(9-20)、(9-21) 均满足,不妨设 $b_1>0$,今证 $i>1$ 时 $b_i=0$(如此则知 F 由个体 1 独裁). 取定 $i>1$,取 $\alpha>0$,使 $b_1\pm\alpha b_i>0$. 以 $\{e_i\}$ 记 $\mathbf{R}^I$ 的标准基,则

$$W(e_1 \pm \alpha e_i) = b_1 \pm \alpha b_i > 0,$$

从而 $e_1 \pm \alpha e_i \succ 0$. 由式(9-20)、(9-21) 推出

$$\varepsilon e_1 \pm \alpha e_i \succ 0, \quad 即\ \varepsilon b_1 \pm \alpha b_i > 0(\forall\ \varepsilon > 0).$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\pm \alpha b_i \geqslant 0$,这得出 $b_i = 0$. □

类似于定理 9.1 与定理 9.2,定理 9.5 亦可看做一个不可能定理. 对于一个社会福利泛函 $F : \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$,似乎可提出如下合理要求:

(1) $F(\cdot)$ 由某个连续的、严格单调增的社会福利函数生成.

(2) $F(\cdot)$ 不容许个体效用水平之间的比较.

(3) $F(\cdot)$ 是非独裁的.

然而,定理 9.5 却断言以上要求无法兼容. 因此,要么条件(1)～(3)中至少有一个不被满足,要么 F 并不定义在整个 $\mathscr{U}^I$ 上.

*9.3 机制设计

9.3.1 机制设计问题

9.1 节中关于社会选择函数的一般性讨论有两个明显的缺点:其一是个体偏好 $\succcurlyeq_i$ 在 $\mathscr{R}$ 中任意选取,这未免太宽泛了,难以作为一个深入分析的出发点;其二是对一个社会选择函数 $f : \mathscr{R}^I \to X$,完全没有考虑 $x = f(\succcurlyeq_i)$ 是否对每个 $\succcurlyeq_i$ 具有某种最优性的问题,而这在社会选择理论的应用中是不可回避的.

现在要作的改进遵循如下基本思路:个体偏好 $\succcurlyeq_i$ 决定于个体所获得的某个信号 θ_i,因而社会选择函数表现为信号 $\theta_i(1 \leqslant i \leqslant I)$ 的函数. 在一定条件下,个体依赖于信号的某种均衡决策可导致给定社会选择函数的实现. 下面是一个严格的描述.

设对每一个体 i 给定了与信号 θ_i 相关的 Bernoulli 效用函数 $u_i(x, \theta_i)$, $u_i(x, \theta_i)$ 可看做当 θ_i 出现时个体 i 选择 $x \in X$ 的收益, θ_i 取于 i 的信号集 Θ_i. 由效用函数 $u_i(\cdot, \theta_i)$ 所决定的偏好记作

$\succcurlyeq_i(\theta_i)$，约定

$$\mathscr{R}_i = \{\succcurlyeq_i(\theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\}.$$

令 $\Theta = \prod \Theta_i$，当写出 $\theta \in \Theta$ 时总意味着 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_I)$，$\theta_i \in \Theta_i (1 \leqslant i \leqslant I)$. 假定 θ 是 Θ 上的一个随机向量，其概率密度为 $\varphi(\cdot)$. θ 的具体实现是各个体的私人信息，但集 Θ、函数 $\varphi(\cdot)$ 与 $u_i(\cdot)$ 是所有个体的共同知识.

与 9.1.2 小节相对应，现在我们称任何形如 $f: \Theta \to X$ 的函数为社会选择函数；任给 $\theta \in \Theta$，$x = f(\theta)$ 即表示用规则 f 从个体偏好 $\succcurlyeq_i(\theta_i)(1 \leqslant i \leqslant I)$ 得出的社会选择或集体选择. 特别，若取 $\Theta_i = \mathscr{R}$，令 $\succcurlyeq_i(\theta_i) = \theta_i \in \mathscr{R}$，则 $f: \Theta \to X$ 就是 9.1.2 小节中所述的社会选择函数.

现在的问题是，因信号的出现是随机的，故选择结果 $f(\theta)$ 也是不确定的. 这就产生一个问题：如何设计一种机制，使得个体无需互相知道各人的信号，只要都按自己的偏好择优，就必定实现选择 $f(\theta)$？这就是机制设计问题，它涉及 I 人的不完全信息对策. 形式上，可将一个机制描述为一个组 $(S_1, S_2, \cdots, S_I, g(\cdot))$，其中 S_i 是 i 的策略集，$g: S \triangleq \prod S_i \to X$ 是结局函数，即对每一策略组合 $s = (s_1, s_2, \cdots, s_I) \in S$，$g(s)$ 表示由 s 决定的结局. 要使机制 Γ 与社会选择函数 $f: \Theta \to X$ 联系起来，关键的一步是引进 Γ 生成的信号相关策略：任何函数 $s_i(\cdot): \Theta_i \to S_i$ 称为由 Γ 生成的 i 的策略，此种策略的一个组合记为

$$s(\theta) = (s_1(\theta_1), s_2(\theta_2), \cdots, s_I(\theta_I)), \quad \theta \in \Theta.$$

定义 9.6 设 $f: \Theta \to X$ 是一个社会选择函数，$\Gamma = (S_1, S_2, \cdots, S_I, g(\cdot))$ 是一个机制.

1° 若存在一个均衡策略组合 $s^*(\cdot): \Theta \to S$，使得

$$g(s^*(\theta)) = f(\theta), \quad \forall\, \theta \in \Theta, \tag{9-24}$$

则说机制 Γ 实现社会选择函数 $f(\cdot)$，且说 $f(\cdot)$ 通过均衡策略组合 $s^*(\cdot)$ 实现.

2° 若 $S=\Theta, g=f, f(\cdot)$ 通过均衡策略组合 $s^*(\theta)\equiv\theta$ 实现，则说 $f(\cdot)$ 可用均衡策略诚实地实现.

直观上，$s^*(\theta)\equiv\theta$ 意味着，无论什么 $\theta_i\in\Theta_i$ 出现，个体 i 总通过选择策略 $s_i^*(\theta_i)=\theta_i$ 而诚实地显示自己的信号. 个体何以乐得如此？这必定是因为，当其对手都这样做时，诚实显示是个体的最佳选择；其所以如此，又是因为 $s^*(\theta)\equiv\theta$ 为均衡策略所致. 在信息不完全的情况下，通过一定的激励机制，诱使个体都诚实地显示各自的信号，并由此导致在一定意义上最优的社会选择，这正是机制设计的奥妙之处.

然而，在定义 9.6 中"均衡策略组合"一词被含糊带过去了，这就留下了作各种不同解释的余地. 形式上，我们必须在"均衡策略"之前加适当的定语并赋予严格意义，然后从定义 9.6 导出社会选择函数的各种实现及相应的诚实实现. 下面仅考虑应用上常见的优势策略实现与 Bayes 实现，后者尤为重要.

9.3.2 优势策略实现

保持上段给出的所有术语与记号. 以下定义是定义 9.6 的一个具体化.

定义 9.7 设 $f:\Theta\to X$ 是一个社会选择函数，$\Gamma=(S_1,S_2,\cdots,S_I,g(\cdot))$ 是一个机制.

1° 设 $s^*(\cdot)=(s_1^*(\cdot),s_2^*(\cdot),\cdots,s_I^*(\cdot))$ 是一策略组合. 若对任给 $\theta=(\theta_i,\theta_{-i})\in\Theta, s=(s_i,s_{-i})\in S, i\in I$ 成立

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i),s_{-i}),\theta_i)\geqslant u_i(g(s),\theta_i), \tag{9-25}$$

则称 $s^*(\cdot)$ 为机制 Γ 的一个优势策略均衡.

2° 若存在 Γ 的优势策略均衡 $s^*(\cdot)$，使得式(9-24) 满足，则说机制 Γ 以优势策略实现社会选择函数 $f(\cdot)$. 若进而设 $S=\Theta, g=f, s^*(\theta)\equiv\theta$，则说 $f(\cdot)$ 可用优势策略诚实地实现，这意味着

$$u_i(f(\theta_i,\theta_{-i}'),\theta_i)\geqslant u_i(f(\theta'),\theta_i)\quad(\theta,\theta'\in\Theta), \tag{9-26}$$

或等价地

$$f(\theta_i,\theta_{-i}{}') \succcurlyeq_i(\theta_i)f(\theta_i{}',\theta_{-i}{}') \quad (\theta,\theta' \in \Theta). \qquad (9\text{-}27)$$

式(9-26)(或式(9-27))称为激励相容条件(参见 8.3.2 小节).

在不等式(9-25)中取 $s = s^*(\theta')(\theta' \in \Theta)$ 得到

$$u_i(g(s^*(\theta_i,\theta_{-i}{}')),\theta_i) \geqslant u_i(g(s^*(\theta')),\theta_i). \qquad (9\text{-}28)$$

在 $g(s^*(\cdot)) = f(\cdot)$ 的条件下,式(9-28) 蕴涵了式(9-26). 这就得出如下命题.

命题 9.1(关于优势策略的显示原理) 若存在某个机制以优势策略实现社会选择函数 $f(\cdot)$,则 $f(\cdot)$ 可用优势策略诚实地实现.

考虑一些解释性的例子.

例 9.2 (1) 设$I=\{1,2\}$,$\Theta_1=\{\theta_1\}$,$\Theta_2=\{\theta_2{}',\theta_2{}''\}$,$X=\{x,y,z\}$. 分别以 $\succcurlyeq_1$, $\succcurlyeq_2{}'$, $\succcurlyeq_2{}''$ 记个体偏好 $\succcurlyeq_1(\theta_1)$, $\succcurlyeq_2(\theta_2{}')$, $\succcurlyeq_2(\theta_2{}'')$,它们界定为

$$\begin{cases} x \succ_1 y \succ_1 z, \\ z \succ_2{}' y \succ_2{}' x, \\ y \succ_2{}'' x \succ_2{}'' z. \end{cases} \qquad (9\text{-}29)$$

设 $f: \Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \to X$ 是一个社会选择函数,则条件(9-27) 相当于

$$\begin{cases} f(\theta_1,\theta_2{}') \succcurlyeq_1 f(\theta_1,\theta_2{}'), \\ f(\theta_1,\theta_2{}'') \succcurlyeq_1 f(\theta_1,\theta_2{}''), \\ f(\theta_1,\theta_2{}') \succcurlyeq_2{}' f(\theta_1,\theta_2{}''), \\ f(\theta_1,\theta_2{}'') \succcurlyeq_2{}'' f(\theta_1,\theta_2{}'). \end{cases} \qquad (9\text{-}30)$$

式(9-30)的前两式是平凡的. 若 $f(\theta_1,\theta_2{}') \neq f(\theta_1,\theta_2{}'')$, 则由式(9-29) 不难看出,式(9-30) 的后两式被满足的充要条件是

$$(f(\theta_1,\theta_2{}'),f(\theta_1,\theta_2{}'')) = (z,x) \text{ 或}(z,y). \qquad (9\text{-}31)$$

例如,当 $(f(\theta_1,\theta_2{}'),f(\theta_1,\theta_2{}'')) = (y,x)$ 时,$f(\cdot)$ 不可能用最优策略诚实地实现. 事实上,若个体 2 发现信号 $\theta_2{}''$ 出现,则他在 x,y 之间更偏好 y(依式(9-29) 有 $y \succ_2{}'' x$!), 因而必不愿得到 $x =$

$f(\theta_1,\theta_2'')$. 于是他会谎称自己的信号为 θ_2'，以便得到较好的 $y=f(\theta_1,\theta_2')$.

(2) 最高价密封式拍卖问题：设拍卖者（下面记为 0）要卖出一单位物品，待购者 i（下面称为竞投者，为简单起见，限定为 $i=1,2$）以密封方式独立报价 b_i. 开封后，报最高价者购得该物品，并按报价对拍卖者付款. 约定当 $b_1=b_2$ 时由 1 购买. 假定 $b_i=\alpha_i\theta_i$，$\alpha_i\in(0,1)$ 是一常数，θ_i 是 i 对拍卖品的估值，假定 θ_i 在 $[0,1]$ 内均匀分布. 令 $I=\{0,1,2\}$，$\Theta_i=[0,1]$，$y_i=1,0$ 分别表示 i 在拍卖后持有与不持有拍卖品，t_i 表示 i 的货币收益，$i=0,1,2$. 以 X 记 $x=(y_0,y_1,y_2,t_0,t_1,t_2)$ 之全体. 自然地，取 i 的效用函数为

$$u_i(x,\theta_i)=\theta_i y_i+t_i \quad (i=0,1,2). \tag{9-32}$$

对任给的 $\theta=(\theta_0,\theta_1,\theta_2)\in\Theta=[0,1]^3$，拍卖规则完全决定了 y_i，$t_i(i=0,1,2)$，从而完全决定了选择函数

$$f(\theta)=(y_0(\theta),y_1(\theta),y_2(\theta),t_0(\theta),t_1(\theta),t_2(\theta)). \tag{9-33}$$

因拍卖总会实现，故 $y_0(\theta)\equiv 0$. 其次，由最高价规则有

$$y_1(\theta)=1-y_2(\theta)=\begin{cases}1, & \alpha_1\theta_1\geqslant\alpha_2\theta_2,\\ 0, & \alpha_1\theta_1<\alpha_2\theta_2;\end{cases} \tag{9-34}$$

$$\begin{cases}t_i(\theta)=-\alpha_i\theta_i y_i(\theta), & i=1,2;\\ t_0(\theta)=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\theta_i y_i(\theta).\end{cases} \tag{9-35}$$

利用以上结论，可将条件(9-26)具体化为

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\theta_i'[y_i(\theta_0,\theta_1',\theta_2')-y_i(\theta_0',\theta_1',\theta_2')]\geqslant 0,\\ (\theta_i-\alpha_i\theta_i)y_i(\theta_i,\theta_{-i}')\geqslant(\theta_i-\alpha_i\theta_i')y_i(\theta_i',\theta_{-i}'), \quad i=1,2.\end{cases} \tag{9-36}$$

式(9-36)的第二个不等式并非总能满足. 例如，取 $\alpha_1=\alpha_2=1/2$，$\theta_1=2/3$，$\theta_1'=\theta_2'=1$，则

$$\begin{aligned}0=&(\theta_1-\alpha_1\theta_1)y_1(\theta_1,\theta_{-1}')\\ &<(\theta_1-\alpha_1\theta_1')y_1(\theta_1',\theta_{-1}')=1/6.\end{aligned}$$

可见 $f(\cdot)$ 不能用优势策略诚实地实现.

以上结论并不令人惊讶. 关键在于,优势策略均衡是一种很强的均衡,在如此强的最优性条件下,要每个竞投者都诚实地显示自己的估价,是难以想象的. 一般地,任何具有一定合理性的社会选择函数都不太可能用优势策略诚实地实现,这一结论包含在以下深刻定理中.

定理 9.6(Gibbard-Satterthwaite 不可能定理)　设 X 是至少含3个元素的有限集;$f: \Theta \to X$ 是一个社会选择函数,$f(\Theta)=X$;$\mathscr{R}_i = \mathscr{P}(1 \leqslant i \leqslant I)$. 则 $f(\cdot)$ 可用优势策略诚实地实现的充要条件为 $f(\cdot)$ 是独裁的,即存在 $h \in I$,使得

$$u_h(f(\theta),\theta_h) \geqslant u_h(x,\theta_h) \quad (\forall\, \theta \in \Theta, x \in X),$$

即

$$f(\theta) \succcurlyeq_h (\theta_h) x \quad (\forall\, \theta \in \Theta, x \in X). \tag{9-37}$$

对于例 9.2 中第一个问题,结合式(9-29)与式(9-37)看出,若

$$(f(\theta_1,\theta_2'),f(\theta_1,\theta_2'')) = (z,y),$$

则 $f(\cdot)$ 由个体 2 独裁;若将 (z,y) 换成 (z,x),则 $f(\cdot)$ 不是独裁的. 这并不与定理 9.6 相矛盾,因定理中的条件 $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ 与 $f(\Theta) = X$ 都不满足.

定理 9.6 的结论促使人们去考虑比优势策略实现较弱的实现,下面所述的 Bayes 实现就是一种恰当的选择.

9.3.3　Bayes 实现

前面已经提到策略概念,但并未按照第六章的模式构成一个对策,现在就来作到这一点. 以 $\mathscr{S}_i$ 记策略 $s_i(\cdot): \Theta_i \to S_i$ 之全体. 对每个 $s(\cdot) \in \mathscr{S} \triangleq \prod \mathscr{S}_i$,定义其效用为

$$\tilde{u}_i(s(\cdot)) = E_\theta[u_i(g(s(\theta)),\theta_i)]. \tag{9-38}$$

这就得到一个正规型对策 $\Gamma_N = (I,\{\mathscr{S}_i\},\{\tilde{u}_i\})$,称它为由机制 Γ 导出的对策. 对这个对策自然可应用 6.2 节中的概念与结论.

定义 9.8　设 $f: \Theta \to X$ 是一个社会选择函数,$\Gamma = (S_1,S_2,\cdots,S_I,g(\cdot))$ 是一个机制,Γ_N 是由 Γ 导出的对策.

1° 若 $s^*(\cdot) \in \mathscr{S}$ 是对策 Γ_N 的一个 Nash 均衡，则称它为机制 Γ 的 Bayes-Nash 均衡.

2° 若存在 Γ 的 Bayes-Nash 均衡 $s^*(\cdot)$，使得式(9-24)满足，则说机制 Γ 以 Bayes-Nash 均衡实现社会选择函数 $f(\cdot)$. 若进而设 $S = \Theta, g = f, s^*(\theta) \equiv \theta$，则说 $f(\cdot)$ 可用 Bayes-Nash 均衡诚实地实现，或说 $f(\cdot)$ 是 Bayes 激励相容的.

依定义 6.5，$s^*(\cdot)$ 是 Γ_N 的 Nash 均衡意味着，对任给 $i \in I$ 及任给 $s_i(\cdot) \in \mathscr{S}_i$ 有

$$\tilde{u}_i(s^*(\cdot)) \geqslant \tilde{u}_i(s_i(\cdot), s^*_{-i}(\cdot)).$$

利用定义式(9-38)，上式可写成

$$E_\theta[u_i(g(s^*(\theta)), \theta_i)] \geqslant E_\theta[u_i(g(s_i(\theta_i), s^*_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i)];$$

进而不难转化为与之等价的

$$E[u_i(g(s_i^*(\theta_i), s^*_{-i}(\cdot)), \theta_i) \mid \theta_i]$$
$$\geqslant E[u_i(g(s_i, s^*_{-i}(\cdot)), \theta_i) \mid \theta_i] \quad (\forall\, \theta_i \in \Theta_i, s_i \in S_i), \qquad (9\text{-}39)$$

其中的期望是对由“·”表示的变量取的. 在式(9-39)中取 $s_i = s_i^*(\theta_i')(\theta_i' \in \Theta_i)$，然后以 $f(\cdot)$ 代 $g(s^*(\cdot))$，得到

$$E[u_i(f(\theta_i, \cdot), \theta_i) \mid \theta_i]$$
$$\geqslant E[u_i(f(\theta_i', \cdot), \theta_i) \mid \theta_i] \quad (\forall\, \theta_i, \theta_i' \in \Theta_i). \qquad (9\text{-}40)$$

式(9-40)正是 $f(\cdot)$ 可用 Bayes-Nash 均衡诚实地实现的条件. 这就得到与命题 9.1 对应的命题如下.

命题 9.2(关于 Bayes-Nash 均衡的显示原理)　若存在某个机制以 Bayes-Nash 均衡实现社会选择函数 $f(\cdot)$，则 $f(\cdot)$ 可用 Bayes-Nash 均衡诚实地实现.

现在以拍卖问题来解释条件(9-40)的应用.

例 9.3(续例 9.2 之(2))　结合式(9-32)、(9-33)、(9-35)，有

$$u_1(f(\theta_0, \theta_1, \theta_2), \theta_1) = \theta_1 y_1(\theta_0, \theta_1, \theta_2) - \alpha_1 \theta_1 y_1(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$$
$$= \alpha_1' \theta_1 y_1(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \quad (\alpha_1' = 1 - \alpha_1);$$
$$E[u_1(f(\cdot, \theta_1, \cdot), \theta_1) \mid \theta_1]$$

$$= \alpha_1{}'\theta_1\int_0^1\int_0^1 y_1(\theta_0,\theta_1,\theta_2)\mathrm{d}\theta_0\mathrm{d}\theta_2$$

$$= \alpha_1{}'\theta_1\int_{\alpha_1\theta_1\geqslant\alpha_2\theta_2}\mathrm{d}\theta_2 = \frac{\alpha_1\alpha_1{}'\theta_1^2}{\alpha_2}.$$

类似地可算出

$$E[u_1(f(\cdot,\theta_1{}',\ \cdot),\theta_1)\,|\,\theta_1] = \frac{\alpha_1\theta_1{}'(\theta_1 - \alpha_1\theta_1{}')}{\alpha_2}.$$

于是

$$E[u_1(f(\cdot,\theta_1,\ \cdot),\theta_1)\,|\,\theta_1] - E[u_1(f(\cdot,\theta_1{}',\ \cdot),\theta_1)\,|\,\theta_1]$$

$$= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_1{}'\theta_1^2 + \alpha_1\theta_1{}'^2 - \theta_1\theta_1{}') \triangleq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(\theta_1,\theta_1{}').$$

用标准的微分学方法可以说明，仅当 $\alpha_1 = 1/2$ 时，$\psi(\theta_1,\theta_1{}')$ 在矩形 $0 \leqslant \theta_1,\theta_1{}' \leqslant 1$ 上恒为非负. 因此，仅当 $\alpha_1 = 1/2$ 时成立

$$E[E_1(f(\cdot,\theta_1,\ \cdot),\theta_1)\,|\,\theta_1]$$
$$\geqslant E[u_1(f(\cdot,\theta_1{}',\ \cdot),\theta_1)\,|\,\theta_1] \quad (\forall\ \theta_1,\theta_1{}' \in [0,1]). \tag{9-41}$$

同理，仅当 $\alpha_2 = 1/2$ 时成立

$$E[u_2(f(\cdot,\theta_2),\theta_2)\,|\,\theta_2]$$
$$\geqslant E[u_2(f(\cdot,\theta_2{}'),\theta_2)\,|\,\theta_2] \quad (\forall\ \theta_2,\theta_2{}' \in [0,1]). \tag{9-42}$$

由 $y_i(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ 与 θ_0 无关不难推出

$$u_0(f(\theta),\theta_0) = t_0(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$$

亦与 θ_0 无关. 因此恒有

$$E[u_0(f(\theta_0,\ \cdot),\theta_0)\,|\,\theta_0] = E[u_0(f(\theta_0{}',\ \cdot),\theta_0)\,|\,\theta_0]. \tag{9-43}$$

综合式(9-41)～(9-43)得出结论：当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ 时，最高价密封式拍卖是可用 Bayes-Nash 均衡诚实地实现的.

术 语 索 引

（术语后面的数字表示该术语出现的页码；为了便于查找，术语在文中用楷体表示）

1～3 画

4 画

5 画

6 画

7 画

8 画

9 画

10 画

11 画

12 画及以上

参 考 文 献

1 Cowell F A. Microeconomic Principles. Oxford Univ. Press, 1986

2 Debreu G. 价值理论. 刘勇等译. 北京:北京经济学院出版社,1988

3 Hey J D. 微观经济学前沿问题. 王询等译. 北京:中国税务出版社,2000

4 胡适耕,施保昌. 最优化原理. 武汉:华中理工大学出版社,2000

5 胡适耕. 现代应用数学基础. 北京:科学出版社,2001

6 Jehle G A. Advanced Microeconomic Theory. New Jersey: Printice Hall Englewood, 1991

7 蒋殿春. 高级微观经济学. 北京:经济管理出版社,2000

8 Madden P. Concavity and Optimization in Microeconomics. New York: Basil Blackwell, 1986

9 Mas-colell A, Whinston M D & Green J R. Microeconomic Theory. Oxford Univ. Press, 1997

10 Varian H R. Microeconomic Analysis. New York: Norton & Company, Inc. 1992

11 王则柯,梁美灵. 价格与市场. 北京:中国经济出版社,1994

12 张定胜. 高级微观经济学. 武汉:武汉大学出版社,2000

[General Information]
书名=微观经济的数理分析
作者=胡适耕
页数=236
SS号=11189426
DX号=
出版日期=2003年08月第1版
出版社=华中科技大学出版社